

CLASIFICACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS DE UN E.V.M.E.¹

Sea (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo.

$\dim(V, g) = 1$

$$Iso(V, g) = \{1_V, -1_V\} \cong O(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$$

$\dim(V, g) = 2$

$$f \in Iso(V, g) \begin{cases} \det(f) = -1 \Rightarrow f = \text{simetría axial (respecto de la recta } V_1) \\ \det(f) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow f = Id \\ \theta = \pi \Rightarrow f = -Id \text{ (Simetría central)} \\ \theta \in [0, \pi] \Rightarrow f = \text{giro de ángulo } \theta \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A = M(f; B) \\ f \in Iso(V, g) \\ B = b.o. \end{matrix} \begin{cases} A = \text{simétrica} \Rightarrow \begin{cases} A = I \Rightarrow f = Id \\ A = -I \Rightarrow f = -Id \text{ (Simetría central)} \\ A \neq -I, I \Rightarrow f = \text{simetría axial} \end{cases} \\ A = \text{no simétrica} \Rightarrow f = \text{giro de ángulo } \theta \neq 0, \pi \end{cases}$$

$\dim(V, g) = 3$

$\dim V_1$	$\dim V_{-1}$	0	1	2	3
0			f es un giro con simetría de eje V_{-1} y ángulo $\theta \neq 0, \pi$		$f = -Id$ Simetría central
1		f es un giro con simetría de eje V_1 y ángulo $\theta \neq 0, \pi$		f es una simetría resp. de la recta V_1	
2			f es una simetría resp. del plano V_1		
3		$f = Id$			

¹ E.V.M.E. = Espacio Vectorial Métrico Euclídeo

$$\left. \begin{array}{l} A = M(f; B) \\ f \in \text{Iso}(V, g) \\ B = \text{b.o.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \text{simétrica} \left\{ \begin{array}{l} A = I \Rightarrow f = Id \\ A = -I \Rightarrow f = -Id \text{ (Simetría central)} \\ A \neq \pm I \Rightarrow \begin{cases} \det A = 1 \Rightarrow f = \text{simetría resp. de la recta } V_1 \\ \det A = -1 \Rightarrow f = \text{simetría resp. del plano } V_1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ A = \text{no simétrica} \left\{ \begin{array}{l} \det A = 1 \Rightarrow f = \text{giro de eje } V_1 \text{ y ángulo } \theta \neq 0, \pi \\ \det A = -1 \Rightarrow f = \text{giro con simetría de eje } V_{-1} \text{ y ángulo } \theta \neq 0, \pi \end{array} \right. \end{array}$$