FÓRMULA DE LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La fórmula que vamos a demostrar es la siguiente:

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\|\vec{n}\|}$$

siendo $P(x_0,y_0,z_0)$ el punto y π el plano.

Hay dos métodos para encontrar la distancia de una recta a un plano. Utilizando esta fórmula o bien, encontrando la recta que pasa por *P* y corta perpendicularmente al plano de ecuación π, su intersección *Q* y hallando el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$. Si deducimos que sólo existen estas dos maneras y ya que la fórmula no se deduce por arte de magia… Esto significará que la fórmula es una simplificación del segundo método, veamos.

Tenemos un punto cualquiera $P(x_0,y_0,z_0)$ genérico y un plano cualquiera genérico de ecuación: $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, el vector normal del plano será: $\vec{n}=(A,B,C)$.

Bien, la ecuación de la recta que pasa por *P* y corta perpendicular mente al plano π de forma paramétrica por ejemplo, será: (llamaremos *r* a la recta)

$$r:\begin{cases} x=x_0+kA \\ y=y_0+kB \\ z=z_0+kC \end{cases}$$, donde *k* es el parámetro que acompaña a las componentes del vector.

Para encontrar la intersección entre la recta y el plano, el punto *Q*, debemos sustituir las componentes de este punto paramétrico en el plano y suponer que satisfacen la ecuación para afirmar que ese punto pertenece al plano, veamos:

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow Q\in\pi: A(x_0+kA)+B(y_0+kB)+C(z_0+kC)+D=0;$$

Simplificando… → $Ax_0+kA^2+By_0+kB^2+Cz_0+kC^2+D=0$;

Agrupando…→ $(kA^2+kB^2+kC^2)+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$;

Sacamos factor común de k → $k(A^2+B^2+C^2)+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$;

Si se cumple que esa ecuación es 0 es porque el punto *Q* de la forma paramétrica (x_0+kA, y_0+kB, z_0+kC) pertenece al plano y será el punto de intersección.

Despejamos *k* para sustituirlo en la ecuación paramétrica de la recta *r* y así encontrar finalmente el punto Q buscado.

Operamos con la última ecuación que teníamos:
$k(A^2+B^2+C^2)=-Ax_0-By_0-Cz_0-D$ → como el vector normal, o el plano es genérico, los signos son triviales y podemos generalizarlo aún más escribiendo el valor absoluto ya que el punto puede ser negativo, positivo o combinado, siempre habrá dos puntos a la misma distancia del plano, uno por encima y el otro por debajo; arreglándolo nos queda:

$k=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}$; El punto *Q* lo hallaremos sustituyendo *k* por esta fracción.

$Q=(x_0+kA, y_0+kB, z_0+kC)$; es el punto *Q* en forma paramétrica, cambiamos *k*:

$$Q=\left(x_0+\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}A, y_0+\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}B, z_0+\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}C\right)$$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ será entonces restarle a *Q*, *P*, y se nos irán las componentes del punto *P*:

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}A,\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}B,\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}C\right);$$

El módulo de este vector será la distancia:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}A\right)^2+\left(\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}B\right)^2+\left(\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{(A^2+B^2+C^2)}C\right)^2}$$

Como las tres fracciones tienen el mismo denominador las podemos sumar y simplificar los cuadrados arriba:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|^2(A^2+B^2+C^2)}{(A^2+B^2+C^2)^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}{A^2+B^2+C^2};$$

Racionalizando se ve claramente que nos resulta la siguiente ecuación:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

que simboliza el módulo del vector entre el punto dado y la intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por P, es decir, la distancia del punto P al plano. Fijaros que el denominador de la ecuación equivale al módulo del vector $\vec{n}$ del plano. Es decir:

$$d(P,\pi)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ el punto y π el plano. C.Q.D.