Demostración de la fórmula de Bhaskara

Sabemos, que las soluciones de la ecuación de segundo grado vienen dadas por la fórmula de Bhaskara:

$$ax^2+bx+c=0 \text{ con } a\neq 0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vamos a demostrar que efectivamente esas son las soluciones de tales ecuaciones:

1. Trasponemos c:
$$ax^2+bx=-c$$
2. Dividimos por $a\neq 0$:
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$
3. Completamos el cuadrado de una suma en el miembro de la izquierda, sumando (en ambos miembros) $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
4. Agrupamos:
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
5. Tomamos raíces cuadradas:
$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
6. Despejamos:
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

que es lo que queríamos probar.

Vamos a demostrarlo de otra forma:
1. Multiplicamos por $4a$:
$$4a\cdot ax^2+4a\cdot bx+4a\cdot c=0$$
2. Agrupamos y pasamos el término independiente al miembro de la derecha:
$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$
$$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b=-4ac$$
3. Completamos el cuadrado del miembro de la izquierda:
$$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2-b^2=-4ac$$
$$(2ax+b)^2-b^2=-4ac$$
4. Pasamos $-b^2$ al otro miembro:
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$
5. Tomamos raíces cuadradas:

$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow 2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

6. Despejamos x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$