Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Demostración de Hipaso de Metaponto (ca. 500 a.C.)

Supongamos que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con $m.c.d.(p,q) = 1$, es decir, p y q no tienen factores comunes (la fracción no se puede simplificar). Entonces, elevando al cuadrado

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \qquad [1]$$

y esto nos dice que p^2 es un número par (por ser múltiplo de 2), de donde se deduce que p también es par, por lo que se puede escribir en la forma $p = 2k$ para algún k.

Sustituyendo en [1] resulta:

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \xrightarrow{:2} q^2 = 2k^2$$

es decir, q^2 es par, y como consecuencia q también lo es.

Pero esto contradice el hecho de que p y q no tienen factores comunes. Como consecuencia la suposición $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ es falsa, y así $\sqrt{2}$ es irracional. C.Q.D.