Demostraciones por inducción

«**Definición**: Un conjunto A de números reales se llama inductivo si $1 \in A$ y $\forall x \in A$ se verifica que $x+1 \in A$.

Se tiene que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, y además, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Principio de inducción matemática: Si A es un conjunto inductivo de números naturales, entonces $A = \mathbb{N}$.

El ***principio de inducción matemática*** es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

1) Se comprueba que el número 1 verifica la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.
2) Comprobamos que si un número n satisface la propiedad, entonces también el número $n+1$ la satisface. Es decir, comprobamos que si $P(n)$ es cierta, entonces también lo es $P(n+1)$.

Si definimos el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta}\}$, entonces 1) nos dice que $1 \in M$, y 2) nos dice que siempre que $n \in M$ se verifica que $n+1 \in M$. Esto es, M es un conjunto inductivo y, como, $M \subseteq \mathbb{N}$, concluimos, por el principio de inducción, que $M = \mathbb{N}$, y como consecuencia, que $P(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por último, 2) no dice que se tenga que probar $P(n)$ es cierta, sino que hay que demostrar la implicación lógica $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Para demostrar dicha implicación lo que hacemos es suponer que $P(n)$ es cierta. Esto es por lo que suele llamarse a $P(n)$ "***hipótesis de inducción***".

Francisco Javier Pérez González
"Conceptos básicos de Análisis Real"
Universidad de Granada
Cálculo I»

Vamos a demostrar varias propiedades por inducción:

1) Potencia, de exponente natural, de un producto

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$(x \cdot y)^1 = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$\left(x\cdot y\right)^{n+1}=\left(x\cdot y\right)^{n}\left(x\cdot y\right)=x^{n}\cdot y^{n}\cdot\left(x\cdot y\right)=x^{n}\cdot x\cdot y^{n}\cdot y=x^{n+1}\cdot y^{n+1}$$

C.Q.D[1].

2) Potencia, de exponente natural, de un cociente

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{n}=\frac{x^{n}}{y^{n}}\qquad\forall x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0\ \text{ y }\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{1}=\frac{x}{y}=\frac{x^{1}}{y^{1}}$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{n}=\frac{x^{n}}{y^{n}}$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}=\frac{x^{n}}{y^{n}}\cdot\frac{x}{y}=\frac{x^{n}\cdot x}{y^{n}\cdot y}=\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}$$

C.Q.D.

3) Logaritmo de una potencia de exponente natural[2]:

$$\boxed{\log_a x^{n}=n\cdot\log_a x\qquad\forall x\in\left(0,+\infty\right),\ a>0,\ a\neq 1\ \text{y}\ \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$\log_a x^{1}=\log_a x=1\cdot\log_a x$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$\log_a x^{n}=n\cdot\log_a x$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$\log_a x^{n+1}=\log_a\left(x^{n}\cdot x\right)=\log_a x^{n}+\log_a x=n\cdot\log_a x+\log_a x=\left(n+1\right)\log_a x$$

C.Q.D.

4) Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo:

$$\boxed{\sum:=180^{\circ}\cdot\left(n-2\right)\qquad\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 3}$$

donde n es el número de lados.

Lo demostramos para $n=3$ (triángulo) *:*

$$180^{\circ}\cdot\left(3-2\right)=180^{\circ}$$

que es lo que suman los ángulos interiores de un triángulo.
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

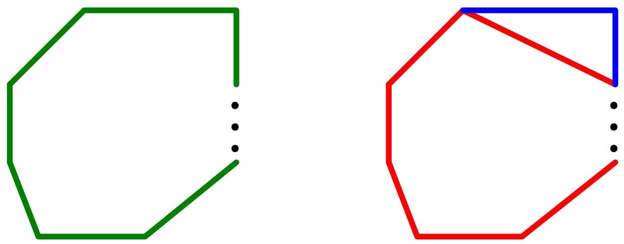
$$180^{\circ}\cdot\left(n-2\right)$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

---

1 C.Q.D. = Como Queríamos Demostrar (Q.E.D. is an initialism of the Latin phrase Quod Erat Demonstrandum)

[2] Sabemos que dicha propiedad es cierta para $n\in\mathbb{R}$.



$$180^{\circ}\cdot(n-2)+180^{\circ}=180^{\circ}\cdot(n-2+1)=180^{\circ}\cdot\left[(n+1)-2\right]$$

C.Q.D.

5) Suma de los n primeros números naturales:

$$\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$$

C.Q.D.

6) Suma de los n primeros números naturales impares:

$$\boxed{1+3+5+...+(2n-1)=n^2\qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$1=1^2=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

C.Q.D.

7) Suma de los n primeros cuadrados:

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$1=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

C.Q.D.

8) Suma de los n primeros cubos:

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$1=1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=\frac{4}{4}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left\{\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}\right\}^2$$

C.Q.D.

9) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ x^n-y^n \text{ es divisible por } x-y}$

Para $n=1$*:* $\left(x^1-y^1\right):(x-y)=1$ *que es cierta.*

Hipótesis de inducción: x^n-y^n es divisible por $x-y$.

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$x^{n+1}-y^{n+1}=x^nx-y^ny=x^nx-yx^n+yx^n-y^ny=x^n(x-y)+y\left(x^n-y^n\right)$$

donde el segundo sumando es divisible por $x-y$*, por hipótesis de inducción, luego se puede sacar factor común* $x-y$*, y por tanto, es divisible por* $x-y$.

C.Q.D.

10) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 6^n \text{ es un número que acaba en } 6}$

Para $n=1$: $6^1=6$
Hipótesis de inducción: 6^n es un número que acaba en 6
Lo demostramos para $n+1$*: como todo número que acaba en 6 se puede escribir en la forma* $10a+6$ con $a \in \mathbb{Z}$*, se tiene que* $6^n=10a+6$ *y, por tanto:*

$$6^{n+1}=6\cdot 6^n=6\cdot(10a+6)=60a+36=60a+30+6=10(6a+3)+6=10c+6$$

con $c=6a+3\in\mathbb{Z}$.

C.Q.D.

11) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}}$

Para $n=1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$
Hipótesis de inducción: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
Lo demostramos para $n+1$*:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\underset{H.I.}{=}\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)+1}$$

C.Q.D.

12) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ impar, } n^2-1 \text{ es divisible entre } 8}$

Para $n=1: 1^2-1=0$ que es divisible entre 8
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para cualquier n *impar*
Lo demostramos para $n+2$ *(que es el impar siguiente de* n*).*
Si n *es impar,* $n=2k+1$ con $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$*, luego tenemos que demostrar la afirmación para*

$$n+2=2k+1+2=2k+3$$

$$(2k+3)^2-1=\left[(2k+1)+2\right]^2-1=(2k+1)^2+4+2\cdot 2\cdot(2k+1)-1=(2k+1)^2-1+4(2k+1)+4=$$

$$=\left[(2k+1)^2-1\right]+8k+8$$

donde aplicando la hipótesis de inducción, cada una uno de los sumandos es divisible entre 8 y, por tanto, la suma también lo es (ya que se puede sacar factor común un 8).

C.Q.D.

13) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n\geq 3 \text{ se tiene que } n!>3^{n-2}}$

Para $n=3: 3!=6>2^{3-2}=3$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n
Lo demostramos para $n+1$*:*

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1) > 3^{n-2}\cdot(n+1) > 3^{n-2}\cdot 3 = 3^{n-1} = 3^{(n+1)-2}$$

C.Q.D.

14) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } F_n < 2^n}$

Números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \forall n \geq 3$

Para $n=1: F_1 = 1 < 2^1 = 2$
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.
Lo demostramos para $n+1$:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n < 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1} + 2\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}\cdot(1+2) = 3\cdot 2^{n-1} < 2^2\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

C.Q.D.

15) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! + 1 = (n+1)!}$

Para $n=1$: $1\cdot 1! + 1 = 2 = (1+1)!$
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.
Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} &1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)! + 1 = \\ &= [1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! + 1] + (n+1)\cdot(n+1)! = \\ &\underset{H.I.}{=} (n+1)! + (n+1)\cdot(n+1)! = (n+1)!\cdot[(n+1)+1] = \\ &= (n+2)\cdot(n+1)! = (n+2)! \end{aligned}$$

C.Q.D.

16) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 2^n > n}$

Para $n=1$: $2^1 = 2 > 1$
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.
Lo demostramos para $n+1$:

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n$$

y como $2n = n + n \underset{n\geq 1}{\geq} 1 + n$*, resulta que*

$$2^{n+1} > n+1$$

C.Q.D.

17) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n > 4 \text{ se tiene que } n^4 < 4^n}$

Para $n=5$: $5^4 = 625 < 1024 = 4^5$
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.
Lo demostramos para $n+1$:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 < 4^n + 4^n + 4^n + 4^n = 4\cdot 4^n = 4^{n+1}$$

ya que

$$n^4 \underset{H.I.}{<} 4^n$$

$$4n^3 \underset{n>4}{<} n\cdot n^3 = n^4 \underset{H.I.}{<} 4^n$$

$$6n^2 = 2\cdot 3\cdot n^2 \underset{n>4}{<} n\cdot n\cdot n^2 = n^4 \underset{H.I.}{<} 4^n$$

$$4n+1 < n^2 + 1 < n^4 \underset{H.I.}{<} 4^n$$

C.Q.D.

18) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}}$

Para $n=1$: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.

Lo demostramos para $n+1$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2-\frac{1}{2^{n+1}}$$

C.Q.D.

19) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k}$ **(fórmula del Binomio de Newton)**

Para $n=1$: $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.

Lo demostramos para $n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k =$$

$$= \binom{n}{0}x^{n+1} + \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]x^n y + \left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]x^{n-1}y^2 + \ldots + \left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]xy^n + \binom{n}{n}y^{n+1} =$$

$$\underset{(1)}{=} \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n y + \ldots + \binom{n+1}{n}xy^n + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1=\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}n$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

C.Q.D.

20) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \text{ se tiene que } (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x\in(-1,+\infty)}$ **(desigualdad de Bernouilli)**

Para $n=1$: $(1+x)^1=1+x=1+1\cdot x$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.

Lo demostramos para $n+1$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \overset{\cdot(1+x)}{\Rightarrow} (1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)$$

y se mantiene el sentido de la desigualdad porque $x>-1$*, o lo que es lo mismo* $x+1>0$*. Por tanto:*

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+x+nx+nx^2=1+nx^2+(n+1)x \qquad \text{[1]}$$

donde $nx^2\geq 0$ *y, como consecuencia,* $1+nx^2>0$.

Ahora, a la desigualdad $1+nx^2>0$ *le sumamos* $(n+1)x$ *a ambos miembros:*

$$1+nx^2+(n+1)x>(n+1)x \qquad \text{[2]}$$

Combinando [1] y [2]:

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+nx^2+(n+1)x\geq(n+1)x$$

y, como consecuencia

$$(1+x)^{n+1}\geq(n+1)x$$

C.Q.D.

21) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \text{ se tiene que } 4^n+15n-1 \text{ es divisible por } 9}$

Para $n=1$: $4^1+15\cdot1-1=18$*, que es divisible por 9*

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.

Lo demostramos para $n+1$:

$$4^{n+1}+15(n+1)-1=4\cdot4^n+15+15-1\underset{(1)}{=}\underline{4\cdot4^n}+15+15-1+\underline{(4\cdot15n-4)}-(4\cdot15n-4)=$$

$$\underset{(2)}{=}4(4^n+15-1)-45n+18\underset{(3)}{=}4\cdot9p-45n+18\underset{(4)}{=}9(4p-5n+2)$$

es decir, $4^{n+1}+15n-1$ *es múltiplo de 9 y, por tanto, divisible entre 9.*

Donde en (1) hemos sumado y restado $4\cdot15n-4$*; en (2) hemos sacado 4 factor común de los términos subrayados; en (3) hemos usado la H.I, teniendo en cuenta que como* $4^n+15n-1$ es divisible por 9*, se puede escribir como* $4^n+15n-1=9p$*; y en (4) hemos sacado 9 como factor común.*

C.Q.D.

Ampliación:

(1) Sumatorio (notación introducida en 1722 por el matemático francés Joseph Louis Lagrange)

El signo $\sum$ (sumatorio[3]) se utiliza en matemáticas para abreviar sumas.

Por ejemplo:

$$1+2+3+...+100=\sum_{k=1}^{100} k$$

$$1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{n} k$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3$$

(2) ***Factorial*** de un número natural o cero

$$n!=\begin{cases} n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1 & \text{si} \quad n\in\mathbb{N} \\ 1 & \text{si} \quad n=0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$1!=1$$

$$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$$

$$8!=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40\,320$$

Fórmula recurrente para definir el factorial:

$$n!=\begin{cases} n\cdot(n-1)! & \text{si} \quad n\in\mathbb{N} \\ 1 & \text{si} \quad n=0 \end{cases}$$

(3) Números combinatorios

$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ para $n,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $0\le k\le n$

Se lee «número combinatorio de n sobre k», ya que coincide con el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k.

[3] $\sum$ es la letra griega sigma.