Sobre el concepto de demostración en Matemáticas

A lo largo de tu vida escolar, antes en el cole y ahora en el instituto, has aprendido muchas propiedades de los números, de las figuras geométricas,... y te las creías por que tus maestros y profes te lo decían. En los ejercicios que has realizado y que venían en el libro, empezaste a adentrarte en una parte desconocida de las Matemáticas, que es la de "ver" que esas propiedades son de verdad ciertas. Ahora pretendo que te adentres un poco en el mundo de las demostraciones, en ese "ver".

Para empezar un ejemplo:

Desde hace tiempo sabes que todos los números pares son divisibles por 2. Fíjate que hay muchos (pero que muchos números pares) y sin embargo, afirmamos que TODOS los números pares son divisibles por 2. Vamos a demostrar que esa afirmación es cierta, esto es, a comprobar que es así.

Empezamos con la definición de divisibilidad: Un número a es divisible por 2 cuando la división de ese número por 2 da de resto cero. Algebraicamente tenemos:

a es divisible por 2 si r = 0, donde r es el resto de dividir a entre 2, que se puede escribir en la forma a = 2q, donde q es el cociente (prueba de la división).

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot q & 2 \\ \hline 0 & q \end{array}$$

Fíjate en lo que tenemos: el número a es 2q, y está claro que 2q dividido entre 2 da de resto cero, y ya tenemos demostrado que todo número par es divisible entre 2.

Ya se que es un poco lioso, pero párate un rato a pensarlo, y verás como la cosa tiene su lógica. Sólo hemos escrito la definición y hemos aplicado otras propiedades que ya conocíamos, como la prueba de la división.

Recuerda, los ejercicios suelen ser inmediatos, los problemas hay que pensarlos y las demostraciones hay trabajarlas más si cabe que los problemas.

Ahora te propongo el siguiente ejercicio para que empieces a practicar:

- Demuestra que 1 divide a cualquier número.
- Cualquier número divide a cero.

Vamos ahora con otra cosa: Las potencias

Recuerda la definición de potencia de exponente natural (la de toda la vida) y las siguientes propiedades que hemos visto en clase:

1. ***Cuando se multiplican potencias que tienen la misma base, se deja la base y se suman los exponentes.***
2. ***Cuando se dividen potencias que tienen la misma base, se deja base y se restan los exponentes.***
3. ***Cuando calculamos la potencia de una potencia, se deja la base y se multiplican los exponentes.***

El ejercicio que te propongo es que demuestres esas propiedades. Para ello, escribe esas expresiones en lenguaje algebraico, y utiliza la definición. Te voy a echar una mano y voy a demostrar por ti la primera:

La propiedad se escribe en lenguaje algebraico así $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

La definición de potencia nos dice que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \ \textbf{y} \ a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}$$

Así, $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}} = a^{n+m}$ ***, que es lo que queríamos ver.***

Para terminar, volvemos a la divisibilidad. A ver si eres capaz de demostrar la siguiente propiedad: Si un número a divide a otro número b y ese número b divide a un tercer número c, entonces a también divide a c.

Te toca a ti. Aquí empieza el largo camino de las demostraciones.

Cosas que puedes demostrar "fácilmente":

- Algunas fórmulas de áreas
- Que la fórmula que conoces para resolver ecuaciones de segundo grado es correcta (tiene unas cuantas operaciones, pero con un poco de paciencia y trabajo seguro que lo consigues)
- El teorema de Pitágoras (geométricamente)
- …