GEOMETRÍA AFÍN.

Punto: Localización en el espacio de un lugar. El número de dimensiones del espacio fija el número de coordenadas de localización.

Vector: Magnitud compuesta de un valor, una dirección y un sentido en esta. Existen vectores libres y vectores fijos.

Vectores libres: Vectores cuya dirección, sentido y valor no cambian pero que pueden estar localizados en diferentes lugares del espacio.

Vectores fijos: Vectores asociados a un punto del espacio. Este fija donde el vector está.

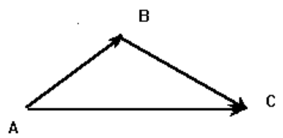
Las características fundamentales de estos son las siguientes:

1.- Cada vector va desde un punto a otro.
De este modo un vector puede ser nombrado por dos puntos - donde comienza y donde acaba - o por el vector y el punto que lo localiza en el espacio. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Este vector se construye restando las coordenadas de B y A.

2.- Solo existe un vector que vaya desde un punto a otro.

3.- Dado tres puntos A, B y C, El vector que va desde A hasta C es el mismo que la suma de los vectores A hasta B y B hasta C.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



ESPACIO AFÍN

Está formado por los siguientes objetos matemáticos.

1.- Un conjunto de puntos que llamaremos A.

2.- Un conjunto de vectores que formen un espacio vectorial, E.

3.- Unas reglas que lo relacionen, o lo que es lo mismo, una aplicación. Éstas son las ya mencionadas arriba.

La dimensión de los espacios afines son la misma que la de los espacios vectoriales que contienen.

Sistemas de coordenadas: Construcción que nos permite mediante un punto y un conjunto de vectores mínimo, localizar cualquier cosa en el espacio en el que estamos trabajando.

Tomaremos como prefijado aquel cuyo origen de coordenadas se encuentra en el punto O(0, 0, 0) y cuyos vectores mínimos son $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ya conocidos o su equivalente $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

DEFINICIONES:

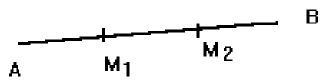
Sean dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$.

Punto medio de A y B:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Si el segmento que une A y B lo queremos dividir en tres partes podemos hacer lo siguiente:

$$M_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad M_2 = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$



Baricentro:

Es el centro de gravedad de un cuerpo geométrico. Este viene determinado como $\vec{g} = \frac{1}{n}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots \vec{a}_n\right)$ donde $\vec{a}_i$ son las coordenadas de los vértices de la figura geométrica.

Ecuaciones de rectas y planos:
Los vectores del tipo (A, B, C) en las ecuaciones siguientes son perpendiculares al plano que determinan.
Los vectores (A, B, C) y (A', B', C') multiplicados vectorialmente nos da el vector de la recta.
$(A,B,C)\times(A',B',C')=(u_1,u_2,u_3)$

	Rectas	**Planos**
Forma vectorial	$\vec{r}=p+t\vec{u}$ $(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+t(u_1,u_2,u_3)$	$\vec{r}=p+\mu\vec{u}+\lambda\vec{v}$ $(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\mu(u_1,u_2,u_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$
Forma paramétrica	$\begin{cases} x=p_1+tu_1 \\ y=p_2+tu_2 \\ z=p_3+tu_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=p_1+\mu u_1+\lambda v_1 \\ y=p_2+\mu u_2+\lambda v_2 \\ z=p_3+\mu u_3+\lambda v_3 \end{cases}$
Ecuación continua:	$\dfrac{x-p_1}{u_1}=\dfrac{y-p_2}{u_2}=\dfrac{z-p_3}{u_3}$	
Ecuación general o implícita.	$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$	$Ax+By+Cz+D=0$

Para construir las distintas ecuaciones anteriores podemos utilizar las siguientes fórmulas y conceptos:

- El vector (u_x, u_y, u_z) pertenece a la recta y está contenido en ésta.
- Los vectores (u_x, u_y, u_z), (v_x, v_y, v_z), pertenecen al plano, están contenidos en éste.
- Los vectores (A, B, C) y (A', B', C') son perpendiculares a los planos que representan.
- La ecuación general de una recta viene determinada como el corte de dos planos.

Así para hallar la ecuación de una recta se puede partir en general de los siguientes datos:

P, Q	P, **u**
$(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda\,(p_x - q_x, p_y - q_y, p_z - q_z)$	$(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda\,(t_x, t_y, t_z)$

Para hallar la ecuación de un plano se puede partir de los siguientes datos:

P, Q, R (tres puntos cont. en el plano)	P, Q, **u** (Dos puntos y un vector cont. en el plano)	P, **u, v** (Un punto y dos vectores cont. en el plano)	P, y **n** perpendicular al plano
$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} x-p_x & y-p_y & z-p_z \\ q_x-p_x & q_y-p_y & q_z-p_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} x-p_x & y-p_y & z-p_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}=0$	$Ap_x + Bp_y + Cp_z + K = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

La primera de estas últimas cuatro ecuaciones también se escribe como

$$\begin{vmatrix} x-p_x & y-p_y & z-p_z \\ q_x-p_x & q_y-p_y & q_z-p_z \\ r_x-p_x & r_y-p_y & r_z-p_z \end{vmatrix}=0$$

Para las siguientes fórmulas, tomaremos como válidas las siguinetes definiciones:

Punto: $P(p_x, p_y, p_z)$, $Q(q_x, q_y, q_z)$ $R(r_x, r_y, r_z)$

Rectas: $r: (m_x, m_y, m_z) + \lambda\,(u_x, u_y, u_z)$ $s: (n_x, n_y, n_z) + \lambda\,(v_x, v_y, v_z)$

Planos: π: $Ax + By + Cz + D = 0$ π': $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE OBJETOS GEOMÉTRICOS

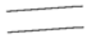
Recta y recta.

Las rectas vienen determinadas por las ecuaciones:

$\vec{r}=p+\mu\,\vec{u}$ $\vec{s}=q+\lambda\,\vec{u}$ Construiremos el vector $\overrightarrow{pq}$

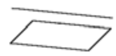
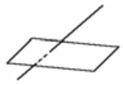
Estudiaremos con este vector y los de la recta el rango de la matriz que determinan, averiguando con ello la dependencia lineal entre éstos:

$$A=\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \overrightarrow{pq}\end{pmatrix}$$

	rg (A)	rg (A*)	
Coincidentes:	1	1	
Paralelas:	1	2	
Se cruzan:	2	3	
Secantes:	2	2	

Posición entre rectas y planos:

La ecuación de la recta viene dada por $(a,b,c)=(p_1,p_2,p_3)+t(u_1,u_2,u_3)$ y la del plano: $Ax+By+Cz+D=0$

	$(A,B,C)\bullet(u_1,u_2,u_3)$	$Aa+Bb+Cc+D$	
Recta en el plano:	$=0$	$=0$	
Recta paralela al plano:	$=0$	$\neq 0$	
Recta secante al plano:	$\neq 0$	$\neq 0$	

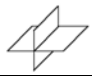
Posición relativa entre dos planos:

Los planos vienen dados por las ecuaciones: $\begin{matrix}Ax+By+Cz+D=0\\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{matrix}$

El rango de las matrices a estudiar son los siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{pmatrix} \quad M^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\end{pmatrix};$$

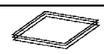
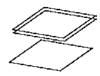
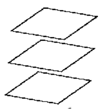
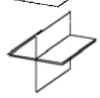
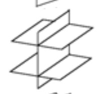
que denominaremos respectivamente matriz de los coeficientes y matriz ampliada.

	rg (M)	rg (M*)	
Coincidentes	1	1	
Paralelos	1	2	
Secantes	2	2	

Posición relativa entre tres planos:

Al igual que en los casos anteriores la manera más rápida es a través del rango.

$$M=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\\ A'' & B'' & C'' & D''\end{pmatrix}$$

	rg (M)	rg (M*)	
Tres coincidentes	1	1	
Dos coincidentes y otro paralelo	1	2	
Tres paralelos	1	3	
Dos coincidentes y el tercero secante	2 y $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	2	
Tres secantes y no paralelos	2	2	
Dos paralelos y el tercero secante	2 y $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$	3	
Tres secantes dos a dos	2	3	
Secantes en un punto.	3	3	

Haz de planos: $Ax+By+Cz+D+k(A'x+B'y+C'z+D')=0$

Haz de planos paralelos: $Ax+By+Cz+K=0$

GEOMETRÍA AFÍN EUCLIDEA.

Definición de espacio euclideo. Producto escalar.

El espacio vectorial euclideo es un espacio vectorial afín en el se introduce además el producto escalar.

$\vec{x}.\vec{y}=\|x\|.\|y\|.\cos\alpha$ = $(x_1, x_2, x_3).(y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ donde $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ denominado módulo del vector.

Ángulo entre dos vectores:

Fácilmente se comprueba que si dos vectores son perpendiculares el producto escalar es cero y que el ángulo entre dos vectores viene dado por la expresión: $\cos\alpha=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|}$

ÁNGULOS ENTRE VARIEDADES LINEALES:

Ángulo entre dos rectas:	**Ángulo entre dos planos:**	**Ángulo entre recta y plano:**
$\cos\alpha=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|}$ donde x e y son los vectores de las rectas.	$\cos\alpha=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|}$ donde x e y son los vectores normales a los planos.	$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|}$ donde x e y son los vectores del plano y la recta respectivamente.

DISTANCIAS:

Distancia entre dos puntos:	**Distancia de un punto a una recta:**	**Distancia de un punto a un plano:**
Mediante la introducción del módulo de un vector podemos aseverar que la distancia entre dos puntos es: $d(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$	Se toma el punto genérico de la recta $(q_1+tu_1, q_2+tu_2, q_3+tu_3)$ se construye el vector hasta P $\overrightarrow{PP_r}=(q_1+tu_1-p_1, q_2+tu_2-p_2, q_3+tu_3-p_3)$ que se multiplica escalarmente por el vector de la recta $\overrightarrow{PP_r}.\vec{u}=0$ dándonos el valor de t para la proyección ortogonal de P sobre r, P_r.	$d(P,\pi')=\frac{\lvert Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
Distancia entre dos rectas que se cruzan:	**Distancia de un recta a un plano:**	
$d(r,s)=\frac{\left\lvert Det\left(\overrightarrow{pq},\vec{u},\vec{v}\right)\right\rvert}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$	Se toma un punto arbitrario de la recta y se calcula la distancia de un punto a un plano o bien : $d(r,\pi)=\frac{\lvert Am_x+Bm_y+Cm_z+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
Distancia entre dos planos:		
$d(\pi,\pi')=\frac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$		