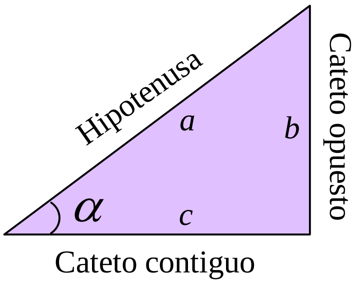
TRIGONOMETRÍA

En un triángulo rectángulo, las *razones trigonométricas* de un ángulo agudo α son las distintas razones (cocientes) que hay entre los lados.



Razones trigonométricas fundamentales

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Otras razones trigonométricas

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

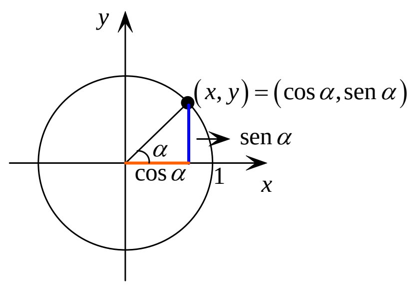
$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

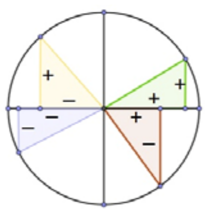
En un sistema de ejes coordenados consideremos una circunferencia de radio unidad y un ángulo α que tenga uno de sus lados sobre el eje *OX*. Entonces, a dicho ángulo α se le puede asociar de manera única un punto, sobre la circunferencia, de coordenadas (x,y) de manera que

$$(x,y) = (\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$$



La circunferencia anterior se llama **circunferencia goniométrica**.

Dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el ángulo, los **signos** de las razones trigonométricas fundamentales son:



Reducción de ángulos al primer cuadrante

Sea α el ángulo del primer cuadrante relacionado, en cada caso, con el ángulo β.

- Si β es un ángulo del segundo cuadrante, entonces

$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = \cos\alpha$

- Si β es un ángulo del tercer cuadrante, entonces

  $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$

- Si β es un ángulo del cuarto cuadrante, entonces

  $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = \cos\alpha$

Ángulos mayores de 360º

Si α es un ángulo mayor de 360º, entonces α y λ, donde $\lambda \in [0º, 360º]$ es el resto de dividir α entre 360º, tienen las mismas razones trigonométricas.

Razones trigonométricas de algunos ángulos

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Relaciones entre razones trigonométricas

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

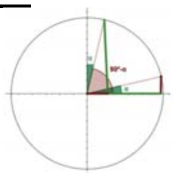
Relación fundamental (teorema de Pitágoras)

$$\xrightarrow{:\operatorname{sen}^2\alpha} \boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha} \qquad \xrightarrow{:\cos^2\alpha} \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

Reducción de las razones trigonométricas

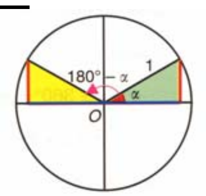
(i) **<u>Ángulos complementarios: α y $90º - \alpha$</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(90º - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90º - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \end{array}}$$



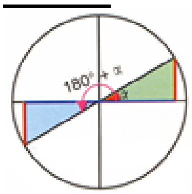
(ii) **<u>Ángulos suplementarios: α y $180º - \alpha$</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(180º - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180º - \alpha) = -\cos\alpha \end{array}}$$



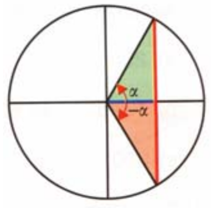
(iii) **<u>Ángulos que difieren en 180º: α y $180º + \alpha$</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(180º + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180º + \alpha) = -\cos\alpha \end{array}}$$



(iv) Ángulos opuestos α y $-\alpha$ o que suman 360º: α y $360^{\circ}-\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen }(-\alpha)=\text{sen }(360^{\circ}-\alpha)=-\text{ sen }\alpha \\ \cos\ (-\alpha)=\cos\ (360^{\circ}-\alpha)=\cos\alpha \end{array}}$$



Otras relaciones

(i) Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen }(\alpha\pm\beta)=\text{sen }\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\text{ sen }\beta \\ \cos\ (\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\text{sen }\alpha\text{ sen }\beta \\ \text{tg }(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\text{tg }\alpha\pm\text{tg }\beta}{1\mp\text{tg }\alpha\text{ tg }\beta} \end{array}}$$

(ii) Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sen }(2\alpha)=2\text{ sen }\alpha\cos\alpha & \\ \cos\ (2\alpha)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha & \text{tg }(2\alpha)=\dfrac{2\text{ tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} \end{array}}$$

(iii) Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sen }\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} & \\ & \text{tg }\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \\ \cos\ \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} & \end{array}}$$

El signo + o – depende del cuadrante en el que se sitúe $\dfrac{\alpha}{2}$.

Transformaciones

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta=2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta=2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)\right]}$$

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]}$$

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]}$$