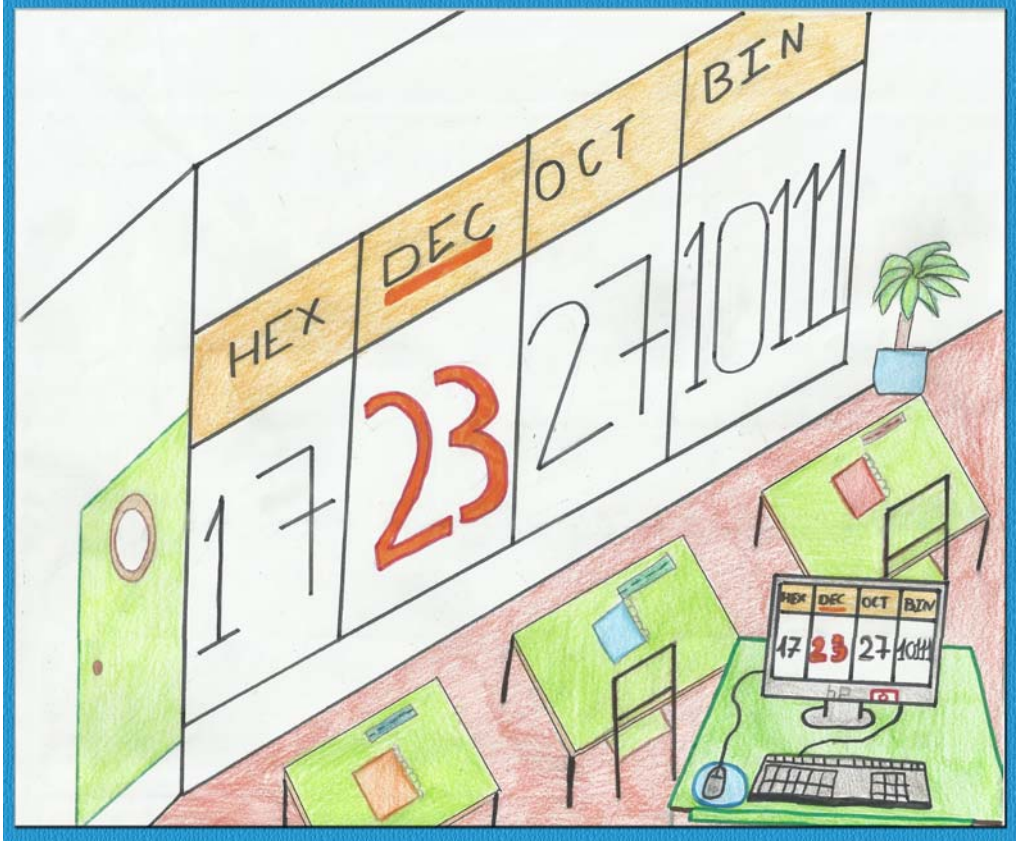
XXIII OLIMPIADA MATEMÁTICA PROVINCIAL DE ALBACETE

de Febrero a Mayo de 2012



DISEÑO DE JORGE CÓZAR LÓPEZ

Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

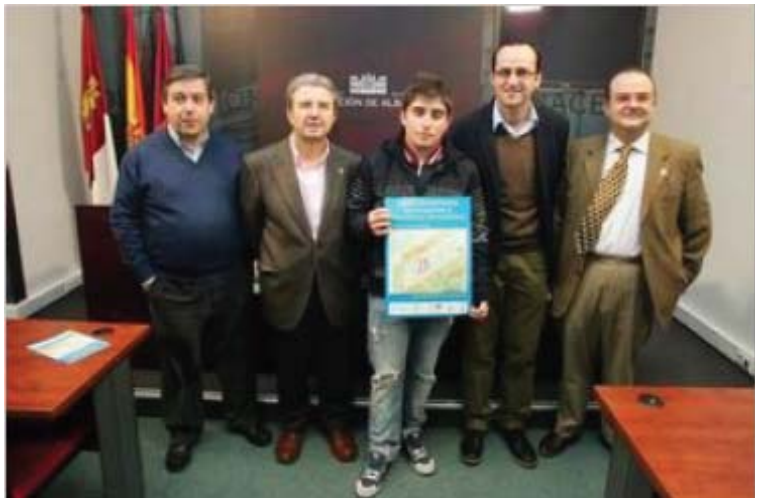
S.C.M.P.M.

Autor
Juan Martínez-Tébar Giménez

Esta publicación se distribuye de forma gratuita al profesorado de matemáticas de los centros de secundaria de Castilla la Mancha

XXIII OLIMPIADA

PRESENTACIÓN



La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete. También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI. Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes "resolutores", el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

.

En esta edición los finalistas han sido:

CICLO 12-14		CICLO 14-16	
ALCARAZ MOLINA	ROBERTO	BERNABEU LORENZO	LOLA
AZAÑA MUÑOZ	JORGE	BULAT	VLADISLAV
BALLESTEROS NIEVES	LOURDES AMAIA	GÓMEZ DELEGIDO	ANTONIO JESÚS
BURGE CANO	DWAYNE	LLANO GÓMEZ	CARLOS
DOMINGO MARTÍNEZ	LAURA	LÓPEZ DE LA ROSA	FRANCISCO
MANSO GARCÍA-MAURIÑO	JUAN	MARTÍN MORENO	PABLO
MARTÍN MORENO	ALEJANDRO	MANSILLA NAVARRO	PALOMA
MARTÍNEZ RIVEIRO	JOSÉ RAMÓN	MORENO GÓMEZ	JESÚS
MURILLO MARTÍNEZ	MARINA	MORENO TOLEDO	MARGARITA
SERRANO MARTÍNEZ	PABLO	OLTRA SÁNCHEZ	DARÍO

Profesores y alumnos finalistas en el IES Alto de los Molinos (Albacete)

En 2012 hemos contado en Albacete con la exposición IMAGINARY

El acto inaugural estuvo presidido por el Consejero de Educación, Cultura y Deporte de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, Marcial Marín interviniendo en él una concejala de Educación del Ayuntamiento de Albacete, Carlota Romero, el coordinador local y presidente de la FESPM , Serapio García Cuesta, y el presidente de la RSME Antonio Campillo, finalizando con la conferencia "Poética en Imaginary: metáforas y analogías en la (re)creación matemática" del coordinador general de la exposición Sebastià Xambó.

Asistió numeroso público, entre otros la diputada de Cultura en el Parlamento Autónomo, el director de la Fundación Globalcaja o el director del Museo de la Cuchillería, así como profesores de la SCMPM

Más información en

http://scmpm.blogspot.com.es/search/label/IMAGINARY

XXII Olimpiada Provincial de Albacete

PRESENTACIÓN.....3

Nivel 12/14 10

Primera Fase 10
F.1 (12/14) Problema 1. SUMANDO DOMINÓS. 10
F.1 (12/14) Problema 2. ¿QUÉ DÍA DE LA SEMANA ES? 10
F.1 (12/14) Problema 3. 2012 AÑO DE TURING. 11
F.1 (12/14) Problema 4. LA CIGÜEÑA TRAE DOS 11
F.1 (12/14) Problema 5. EL MEDALLERO.....12
F.1 (12/14) Problema 6. PRINCESAS MENTIROSAS 12

Segunda Fase 13
F.2 (12/14) Problema 1. POR LOS CUATRO COSTADOS 13
F.2 (12/14) Problema 2. AMIGOS PARA SIEMPRE.....13
F.2 (12/14) Problema 3. UN PROBLEMA PEGAJOSO.....14

Fase Final.....15
F.F (12/14) Problema 1. CONTANDO MONEDAS.....15
F.F (12/14) Problema 2. JARDÍN MATEMÁTICO.....15
F.F (12/14) Problema 3. SUMANDO 4 O 7.....16

Nivel 14/16 17

Primera Fase 17
F.1 (14/16) Problema 1. 201 AÑO DE TURING. 17
F.1 (14/16) Problema 2. BUENA VISTA.....17
F.1 (14/16) Problema 3. A LA RIFA LOCA.....18
F.1 (14/16) Problema 4. COMIENDO UNA GALLETA 18
F.1 (14/16) Problema 5. JÓVENES Y ¿MENTIROSAS?.....19
F.1 (14/16) Problema 6. 2012 19

Segunda Fase 20
F.2 (14/16) Problema 1. ¿NARANJA O LIMÓN?.....20
F.2 (14/16) Problema 2. TRIÁNGULO CON CIRCUNFERENCIAS 20
F.2 (14/16) Problema 3. NUMB3RS 21

Fase Final.....21
F.F (14/16) Problema 1. DNI MATEMÁTICO.....21
F.F (14/16) Problema 2. BLANCO DE MIEDO. 22
F.F (14/16) Problema 3. ESTANQUE HELADO. 22

Soluciones.....23
- Solución - Fase 1 - (12/14) – SUMANDO DOMINÓS.....23
- Solución - Fase 1 - (12/14) – ¿QUÉDÍADELA SEMANA ES? ……..23
- Solución - Fase 1 - (12/14) – 2012 AÑO DE TURING 23
- Solución - Fase 1 - (12/14) – LA CIGÜEÑA TRAE DOS.....24
- Solución - Fase 1 - (12/14) – EL MEDALLERO. 24
- Solución - Fase 1 - (12/14) –PRINCESAS MENTIROSAS. ..24
- Solución - Fase 2 - (12/14) – POR LOS CUATRO COSTADOS 24

- Solución - Fase 2 - (12/14) – AMIGOS PARA SIEMPRE.....26
- Solución - Fase 2 - (12/14) – UN PROBLEMA PEGAJOSO.26
- Solución - Fase Final - (12/14) – CONTANDO MONEDAS.27
- Solución - Fase Final - (12/14) –JARDÍN MATEMÁTICO...27
- Solución - Fase Final - (12/14) – SUMANDO 4 O 7.....28
- Solución - Fase 1 - (14/16) – 2012 AÑO DE TURING. 29
- Solución - Fase 1 - (14/16) – BUENA VISTA.....29
- Solución - Fase 1 - (14/16) – A LA RIFA LOCA.....29
- Solución - Fase 1 - (14/16) – COMIENDO GALLETAS.....30
- Solución - Fase 1 - (14/16) –JOVENES Y MENTIROSAS ...30
- Solución - Fase 2 - (14/16) –¿NARANJA O LIMÓN?.....31
- Solución - Fase 2 - (14/16) – TRIÁNGULO Y CIRCUNFERENCIAS 32
- Solución - Fase 2 - (14/16) –NUMBERS.....32
- Solución - Fase Final - (14/16) – DNI MATEMÁTICO.....34
- Solución - Fase Final - (14/16) –BLANCO DE MIEDO. 35
- Solución - Fase Final - (14/16) –ESTANQUE HELADO. 35

Fotografías.....36

XXIII Olimpiada

Albacete 2012

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. SUMANDO DOMINÓS.
Si ignoramos la blanca doble (o doble 0) podemos considerar las 27 fichas restantes del dominó como una fracción menor o igual que uno. Por ejemplo la ficha de la figura sería $\frac{2}{6}$. *¿Cuánto suman las 27 fichas de un dominó?*

F.1 (12/14) Problema 2. ¿QUÉ DÍA DE LA SEMANA ES?

Un determinado año tiene 53 domingos. ¿Es posible que en un año así el 8 de marzo caiga en viernes?

F.1 (12/14) Problema 3. 2012 AÑO DE TURING.

En 1912 nacía en Inglaterra Alan Turing, uno de los matemáticos más importantes y más injustamente tratados del siglo XX. Su aportación más relevante fue la de descifrar durante la II Guerra Mundial los códigos de la máquina enigma.

Haz tú como Turing y di cuál es el valor numérico de cada letra sabiendo que RMPR es el año de su centenario.

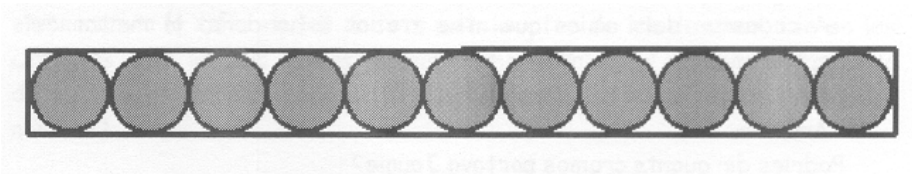
RAAP + GGAP = PMBMR

F.1 (12/14) Problema 4. LA CIGÜEÑA TRAE DOS

Si el 3% de todos los nacimientos fuera de mellizos, ¿los mellizos serían el 3% de la población, más del 3%, o menos del 3%? Razona tu respuesta.

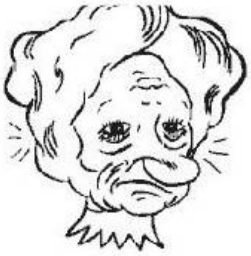
F.1 (12/14) Problema 5. EL MEDALLERO.

En un medallero como el que se ve en la figura ¿Qué parte del mismo ocupan las medallas? Expresa el resultado en tanto por ciento.



F.1 (12/14) Problema 6. PRINCESAS MENTIROSAS .

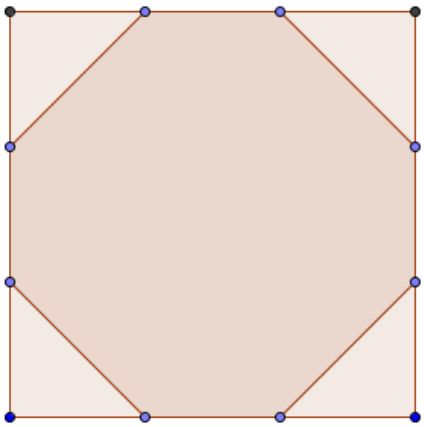
El joven príncipe Icosaedro acude al reino de Poliedra para pedir la mano de la joven princesa Hexaedra, hija del poderoso monarca Dodecaedro XII. El rey propone al príncipe un reto para que demuestre que es digno de su hija la princesa. El reto consiste en la resolución del siguiente enigma:
«Tengo cinco hijas -dice el rey-; dos de mis hijas tienen los ojos negros y tres tienen los ojos azules. Las que tienen los ojos negros siempre dicen la verdad y las que tienen los ojos azules siempre mienten. Dentro de unos instantes estas cinco hijas serán conducidas ante nuestra presencia con los ojos vendados. Sin verles los ojos, tendrás que descubrir, sin error posible, las que tienen los ojos negros y las que tienen los ojos azules y para ello podrás hacer hasta tres preguntas a mis cinco hijas».
¿Con qué preguntas descubrió el príncipe el color de los ojos de las hijas del rey?



Segunda Fase

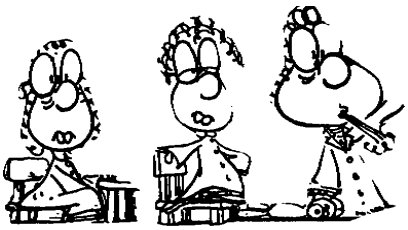
F.2 (12/14) Problema 1. POR LOS CUATRO COSTADOS

Dibuja un cuadrado cualquiera y divide sus lados en tres partes iguales. A continuación unes cada dos puntos consecutivos obteniendo así un octógono como el de la figura. ¿Crees que es regular? En caso que opines que no ¿Cómo se habría de efectuar la división de los lados del cuadrado para que si lo sea?



F.2 (12/14) Problema 2. AMIGOS PARA SIEMPRE

En la clase de 1º ESO C hay 21 alumnos. Si sabemos que cada chica tiene un número diferente de amigos varones. ¿Cuál es el número máximo de chicos que puede haber en 1º C?



F.2 (12/14) Problema 3. UN PROBLEMA PEGAJOSO

¡Mamá quiero un chicle! Dijo el primer gemelo. ¡Yo también y lo quiero del mismo color que Pablo! Dijo Jesús el segundo gemelo al ver la máquina de chicles a 1 €.
La máquina de chicles contiene 6 chicles color verde, 5 azules y 4 rojos y no hay forma de saber cual de ellos va a salir.
¿Cuántos euros debe gastarse su madre para asegurarse que los dos gemelos tienen dos chicles del mismo color? ¿Y si los dos lo quieren verde? Razona tu respuesta.

Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. CONTANDO MONEDAS

Alicia vació sobre la mesa las monedas de su hucha, distribuyéndolas en tres montones diferentes.En esos montones había un total de 48 monedas, pero observó lo siguiente: "Si del primer montón paso al segundo tantas monedas como había en este último, y entonces del segundo paso al tercero tantas monedas como había en este tercer montón, y después, del tercer montón paso al primero tantas monedas como había en ese momento en el primero, al terminar este proceso los tres montones serán iguales".

¿Cuántas monedas había al principio en cada montón?

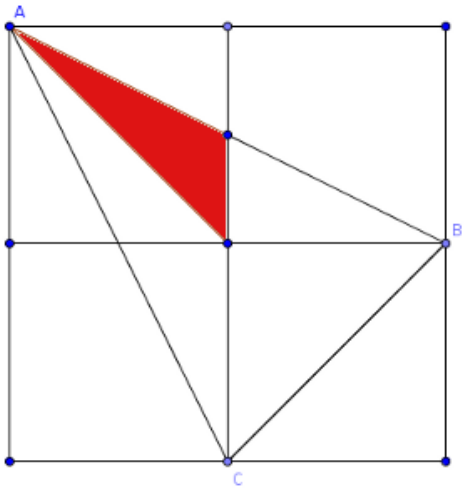
F.F (12/14) Problema 2. JARDÍN MATEMÁTICO

En el dibujo aparece el plano del jardín cuadrado que se va a construir en la entrada del instituto Alto de los Molinos.

La zona sombreada, que está encerrada en uno de los cuatro cuadrados en los que está dividido, y tiene un lado que es la diagonal y otro que es la mitad del lado de ese cuadrado, mide 5 metros cuadrados y es la zona que está plantada ya de rosales.

El triángulo ABC, limitado por el vértice superior izquierdo, y la mitad de los dos lados opuestos del jardín, será la superficie que ocuparán todos los rosales cuando esté acabado el jardín.

Calcula la superficie del jardín completo y también de la zona donde irán los rosales.



F.F (12/14) Problema 3. SUMANDO 4 O 7

Considera el siguiente juego para dos jugadores: Empezando desde el cero, cada jugador en su turno suma 4 o suma 7 al resultado que el otro jugador haya obtenido.

Si el resultado que consigue un jugador en su turno acaba en dos ceros (es decir, es múltiplo de 100), el jugador gana.

Asumiendo que ambos jugadores saben razonar, ¿hay una estrategia para que alguno de los dos gane el juego, o puede este juego continuar indefinidamente?

Si existe una estrategia, decide si es mejor empezar el juego, o dejar empezar al rival, y cuál debe ser la cadena de movimientos que hay que realizar para ganar.

Nivel 14/16

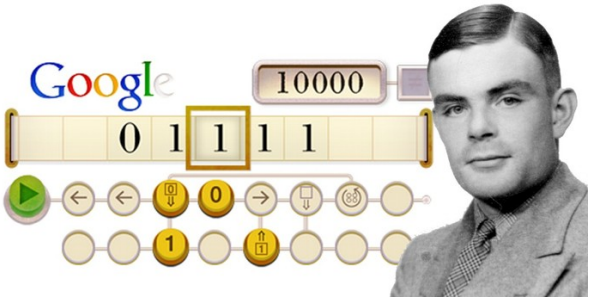
Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. 201 AÑO DE TURING.

En 1912 nacía en Inglaterra Alan Turing, uno de los matemáticos más importantes y más injustamente tratados del siglo XX. Su aportación más relevante fue la de descifrar durante la II Guerra Mundial los códigos de la máquina enigma.
Emula tú a Turing y descubre que valor corresponde a cada letra en esta curiosa suma con otro nombre famoso.

```
   A R Q
+  U I M
---------
 E D E S
```

Alan Turing Google Doodle - 23th June 2012

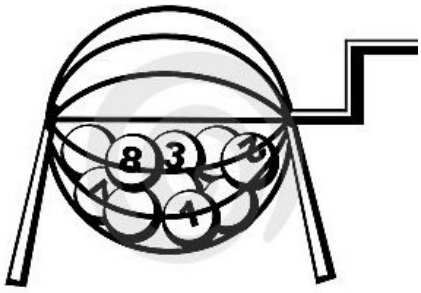


F.1 (14/16) Problema 2. BUENA VISTA.

El 40% de mis alumnos son varones. De ellos, el 30% lleva gafas. Si hay tres estudiantes varones que llevan gafas, ¿cuántas chicas hay en clase?

F.1 (14/16) Problema 3. A LA RIFA LOCA

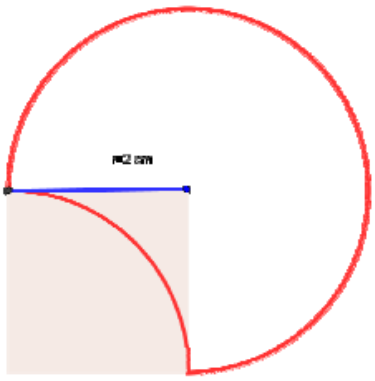
En el instituto se va a realizar una rifa con fines benéficos. Las papeletas están numeradas de 000 al 999, y se sortea un único premio . Considerando las tres cifras, incluso los ceros a la izquierda ¿Qué es más probable: que la papeleta premiada tenga tres cifras distintas o que tenga alguna o todas repetidas? Razona la respuesta.



F.1 (14/16) Problema 4. COMIENDO UNA GALLETA

Mario va a comer una galleta circular -no tenemos en cuenta el grosor- de 2 cms. de radio. Le da un primer mordisco dejando la galleta con la forma de la figura.

¿Qué superficie le queda por comer?



F.1 (14/16) Problema 5. JÓVENES Y ¿MENTIROSAS?

Ana: "Yo soy la mayor."

Beatriz: "Yo no soy la más joven ni la más vieja."

Carolina: "Yo no soy la más joven."

Diana: "Yo soy la más joven."

Sólo una de las cuatro amigas no está diciendo la verdad. ¿Cuál es la más joven? ¿Cuál es mayor?

F.1 (14/16) Problema 6. 2012

Nuestro amigo Antonio Roldán nos felicitó 2012 con la siguiente curiosidad:

Feliz (9*8*7-6+5)*4-3+2+1+0

¿Podrías encontrar otras combinaciones de operaciones y paréntesis, usando solamente los dígitos del 0 al 9 sin repetirlos para obtener 2012? (Puedes hacerlo en cualquier orden y también usar números de más de una cifra ej 38 o 764)

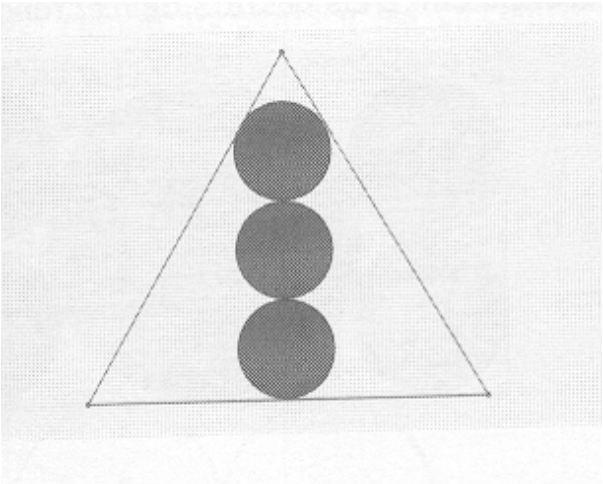
Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. ¿NARANJA O LIMÓN?

María tiene una bolsa con cuatro caramelos cada uno de los cuales puede ser de naranja o de limón. Invita a Alicia a sacar uno.
Antes María le dice a Alicia "Como se que te gustan más, te digo que hay al menos un caramelo de naranja en la bolsa"
¿Cuál es la probabilidad de que Alicia coja un caramelo de naranja?

F.2 (14/16) Problema 2. TRIÁNGULO CON CIRCUNFERENCIAS

En esta figura las tres circunferencias son iguales y tangentes. Sabiendo que el lado del triángulo equilátero mide una unidad, calcula el radio de las circunferencias



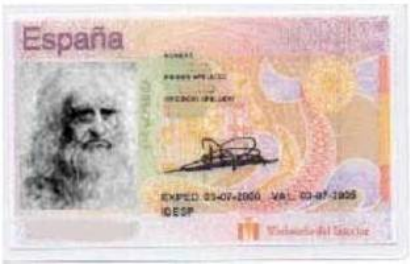
F.2 (14/16) Problema 3. NUMB3RS

Cuando paseaban por la ciudad tres matemáticos, observaron que el conductor de un automóvil infringió el reglamento de tráfico. Ninguno de los tres recordaba el número (de cuatro cifras) de la matrícula, pero como los tres eran matemáticos, cada uno de ellos advirtió alguna particularidad de dicho número. Larry advirtió que las dos primeras cifras eran iguales. Amita se dio cuenta de que también coincidían las dos últimas cifras. Y, por último, Charlie aseguraba que todo el número de cuatro cifras era un cuadrado exacto. ¿Puede determinarse el número de la matrícula del automóvil valiéndose tan sólo de estos datos?

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. DNI MATEMÁTICO.

A los habitantes de Poliedra se les asigna un número de DNI que tiene nueve dígitos.



A Esférico Pi, le han asignado un número que tiene una curiosa particularidad.

Está formado por nueve cifras distintas, todas del 1 al 9.

Es divisible entre 9.

Si le quitamos la última cifra, el número que queda es divisible entre 8.

Si le quitamos las dos últimas cifras, es divisible entre 7.

Si le quitamos las tres últimas cifras, es divisible entre 6.

Y así sucesivamente, hasta que le quitamos las ocho últimas cifras, en cuyo caso es múltiplo de 1, por supuesto. ¿Podrías indicar cuál es ese número?

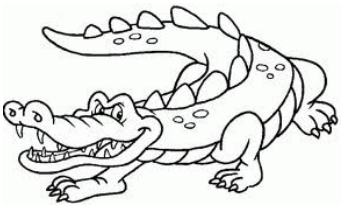
F.F (14/16) Problema 2. BLANCO DE MIEDO.

En Poliedra, a los condenados a muerte, se les ofrece una última oportunidad de salvar su vida.

Deben escoger una ficha de una urna en la que hay 55 fichas y dejarla sobre una mesa. Si su cara oculta es blanca, el condenado salvará su vida, mientras que si es negra, directamente se le lanza a una balsa con cocodrilos hambrientos.

En cierta ocasión, la urna contenía 16 fichas con ambas caras blancas, 25 fichas con una cara blanca y otra negra y 14 con ambas caras negras.

¿A quién es más favorable este método, al condenado o a los cocodrilos?



El condenado, Octaedro Phi, extrajo una ficha y la colocó sobre la mesa, resultando que su cara visible era blanca.

¿Cuál era en ese momento la probabilidad de salvarse?

F.F (14/16) Problema 3. ESTANQUE HELADO.

Con el frío del invierno un estanque del parque de forma rectangular se ha congelado.

Unos niños, jugando, han lanzado una piedra que ha quedado en un punto de la superficie, sobre el hielo.

María dice que basta calcular tres longitudes desde la piedra a tres de las esquinas del rectángulo para saber cuánto valdrá la cuarta distancia.

¿Puedes ayudarle a calcular esa cuarta distancia en función de las otras tres?

Llama a, b, c a las tres distancias y encuentra la última, x.

Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – SUMANDO DOMINÓS**

Bastará con sumar las 21 fracciones correspondientes a las fichas no nulas:

$$\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right)=\frac{27}{2}$$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – ¿QUÉ DÍA DE LA SEMANA ES?**

Analizaremos dos casos, un año común y un año bisiesto.

Los años comunes tiene 52 semanas y un día por lo que para que tenga 53 domingos el 1 de enero tiene necesariamente que serlo. En este caso el 8 de marzo es miércoles.

Los años bisiestos tienen 52 semanas y dos días. Hay dos opciones que el 1 de enero sea domingo, en cuyo caso el 8 de marzo es jueves (febrero tiene 29 días). O bien el uno de enero es sábado y por tanto el 8 de marzo será miércoles.

Por lo que no es posible que un año con 53 domingos el 8 de marzo caiga en viernes.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – 2012 AÑO DE TURING**

Es el típico ejercicio que por ensayo- error, además de las pistas se llega fácilmente a ala solución:

A=5 B=3 G=7 M=0 P=1 R=2

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – LA CIGÜEÑA TRAE DOS.**

Esto significa que si hay 100 alumbramientos nacen realmente 103 niños de los cuales 6 serían mellizos y 97 no, por lo que los mellizos representan más del 3% concretamente $\frac{6}{103}.100 = 5,8\%$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – EL MEDALLERO.**

Si r es el radio de cada medalla, el medallero tiene por dimensiones 22 r de base y 2 r de altura por lo que su superficie será $44r^2$. Las 11 medallas circulares ocupan una superficie $11\pi r^2$ por lo que el porcentaje será $\frac{11\pi r^2}{44r^2}.100 = 78,54\%$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) –PRINCESAS MENTIROSAS.**

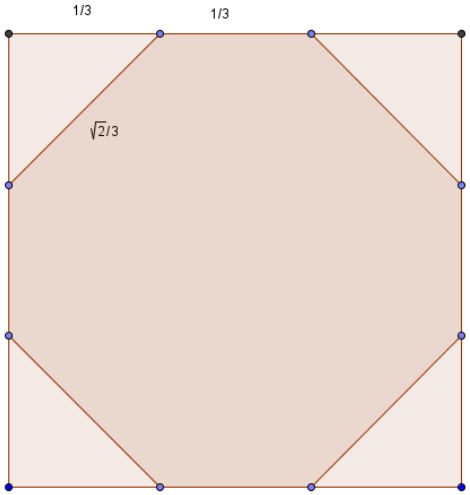
Tenemos cinco hijas: Dos hijas con los ojos negros que siempre dicen la verdad y tres hijas con los ojos azules que siempre mienten.

Basta con preguntarle a una de ellas que diga el color de los ojos de todas las hijas. Si dice la verdad dirá dos hijas con los ojos negros y tres con los ojos azules con lo que ya está resuelto.

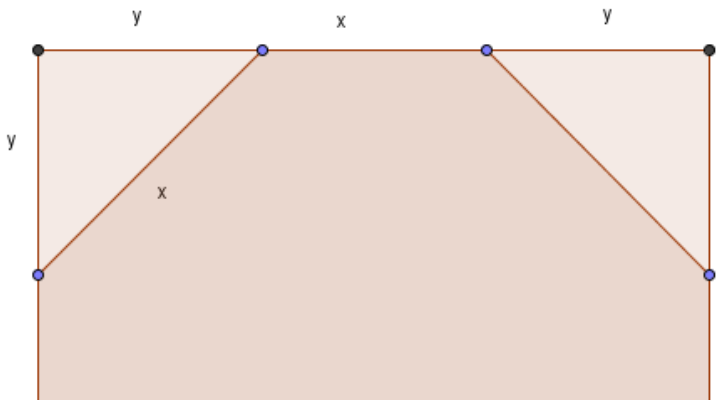
Si por el contrario miente dirá dos hijas con ojos azules y tres con ojos negros y bastará con invertir su respuesta para tener el resultado.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – POR LOS CUATRO COSTADOS**

Se comprueba fácilmente aplicando el Teorema de Pitágoras que unos lados del octógono, miden 1/3 de la longitud del cuadrado mientras que otros miden √2/3, por tanto el octógono así construido NO es regular.



Para que fuese regular la división no sería en partes iguales sino que debería de cumplir que la parte central sea igual a la hipotenusa.



Algebraicamente y tomando el lado como 1

$\left.\begin{array}{l} 2y+x=1 \\ x^2=2y^2 \end{array}\right\}$ Que resolviendo $\begin{array}{l} x=\sqrt{2}-1 \\ y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$ o lo que es lo mismo que la razón $\dfrac{x}{y}=\sqrt{2}$

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – AMIGOS PARA SIEMPRE**

Para resolverlo podemos construir la siguiente tabla. A las chicas las denominamos por números y a los chicos por letras

Chica nº	***Sus amigos son…***	***Nº de chicos***	***Nº de chicas***	***Total***
1	***Ninguno***	*0*	*1*	*1*
2	***A***	*1*	*2*	*3*
3	***AB***	*2*	*3*	*5*
4	***ABC***	*3*	*4*	*7*
5	***ABDC***	*4*	*5*	*7*
…	**…**	…	…	…
10	***ABCDEFGHI***	*9*	*10*	*19*
11	***ABCDEFGHIJ***	*11*	*10*	*21*

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – UN PROBLEMA PEGAJOSO**

La situación más desfavorable que se puede plantear es que los tres primeros chicles sean de distinto color (independientemente de la probabilidad de salir de cada uno) por lo que necesariamente el cuarto coincidirá con alguno de ellos. Por tanto el máximo que debe gastar la madre son cuatro euros para obtener dos chicles del mismo color.

Sin embargo, si los quieren verdes la situación más desfavorable es que salgan antes los otros 9 que no son verdes. Por tanto en este caso el máximo que ha de gastar son 11 €

- **Solución - Fase Final - (12/14) – CONTANDO MONEDAS**

En este ejercicio es fundamental entender bien cómo se hacen las operaciones. En cada una de ellas se duplica el número de monedas de un montón, quitándolas de otro.

Como al final quedan los tres montones iguales, sabemos que en cada uno de ellos habrá 16 monedas, ya que no se ha perdido ninguna en el proceso.

Vamos a proceder a una especie de vuelta atrás para deshacer todo el proceso, puesto que las operaciones son reversibles.

Entonces, deshacer el último paso consiste en dejar al primer montón con 8 monedasy pasar las otras ocho al tercer montón, que pasa a tener 24.

El paso anterior se realiza entre los montones dos y tres, quitando la mitad de las 24 al tercero, que son 12, y dejándolos en el montón segundo, que pasa a tener 28.

Por último, el primer paso se deshace tomando la mitad de las monedas del montón segundo, que ahora tiene 28 y pasa a tener 14, y poniéndolas en el primer montón, que pasa de tener 8 a 22.

En resumen, que al principio tenemos un primer montón con 22 monedas, un segundo con 14, y un tercer montón con 12.

- **Solución - Fase Final - (12/14) –JARDÍN MATEMÁTICO**

Es sencillo ver que la parte coloreada, respecto a uno de los cuatro cuadraditos en los que está dividido el jardín, representa un cuarto del área del cuadradito, ya que es un triángulo que tiene la altura total del cuadrado, y de base la mitad del lado, por lo que su área es una cuarta parte.

De esta forma, sabemos que el área del jardín completo será 16 veces mayor que la parte coloreada, es decir, 80 metros cuadrados.

El triángulo donde irán los rosales se puede dividir de forma sencilla en 6

triángulos de la misma área que el que tenemos, aunque evidentemente no todos de la misma forma. Eso supone que el área que ocuparán al final los rosales es de 30 metros cuadrados, es decir, que han plantado ya una sexta parte de ese área.

- **Solución - Fase Final - (12/14) – SUMANDO 4 O 7.**

Este tipo de juegos se deben empezar siempre por el final, para estudiar cómo te puedes asegurar la victoria, y dividiendo las situaciones en valores con los que ganas y valores con los que pierdes.
En nuestro caso, debemos empezar el estudio desde 100, que es la primera ocasión en la que alguien gana. Evidentemente, 93 y 96 son posiciones desde las que podemos ganar, por lo que debemos evitar que nuestro rival disponga de ellas. Buscando un número con el que forzar a nuestro rival a devolver ese valor, encontramos pronto el 89. Si nuestro rival suma 4, nos devuelve 93, y si suma 7, 96. En cualquiera de ambas, ganamos. Así que en realidad, el que llegue a dejar un 89, gana.
Razonando hacia atrás, encontramos el 78, el 67, el 56, el 45, el 34, el 23, el 12 y el 1. Si conseguimos pasarle 1 a nuestro rival, seguro que llegaríamos a 100 y ganaríamos.
Lamentablemente, debemos empezar sumando 4 o 7. Entonces no debemos apuntar a 100. Si repetimos el sistema (observa que consiste en restar 11 cada vez), razonamos desde 200 que tendríamos que empezar desde 2, para llegar a 300, desde 3 y ¡por fin!, para llegar a 400, desde 4.
Ahora vamos a comprobar si funciona nuestro sistema. Empezamos sumando 4. Nuestro rival hace su jugada, y nosotros hacemos la contraria, de forma que llegaremos a 15. Seguiremos así, sumando la jugada contraria a la que haga nuestro rival. Cuando lleguemos cerca del 100, le pasamos al rival 4 + 11*8 = 92, de forma que no puede lograr 100, si no 96 o 99. Nosotros sumamos el número contrario, llegando al 103, y proseguimos. El siguiente paso peligroso será el 103 + 8*11 = 191, en el que nuestro rival puede llegar a 195 o a 198. De nuevo sumamos nosotros para llegar a 202. El último paso peligroso será el de

202 + 8*11 = 290, en el que nuestro rival puede ir al 294 o al 297. Nosotros llegaremos en cualquier caso al 301. El final del juego llegará en el 301 + 8*11 = 389, en el que le pasamos al rival este número, de forma que nos devuelve 393 o 396, ganando en cualquier caso al conseguir 400

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – 2012 AÑO DE TURING.**

Hay más de una solución a este problema que se resuelve por ensayo-error

A=4 R=8 Q=7 U=5 I=3 M=2 E=1 D=0 S=9

A=4 R=8 Q=7 U=5 I=2 M=6 E=1 D=0 S=3

A=4 R=8 Q=9 U=5 I=2 M=7 E=1 D=0 S=6

Y todavía hay más…

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – BUENA VISTA.**

Si hay 3 estudiantes que llevan gafas y estos representan al 30% de los varones en la clase habrá $3.\frac{100}{30}=10$ estudiantes varones.

Como a su vez los varones son el 40% del total en clase hay $10.\frac{100}{40}=25$ personas de las cuales 15 serán mujeres.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – A LA RIFA LOCA**

Para saber cuantos números de tres cifras diferentes hay podemos razonar de la siguiente manera:

Hay 1000 boletos, del 000 al 999.

La primera cifra puede ser cualquiera de las 10, la segunda puede ser una de las nueve restantes y la tercera por tanto puede ser de las ocho que quedan por lo que hay 10.9.8=720 números con todas sus cifras distintas y 280 que tienen alguna o todas repetidas. Como hay más de las primeras

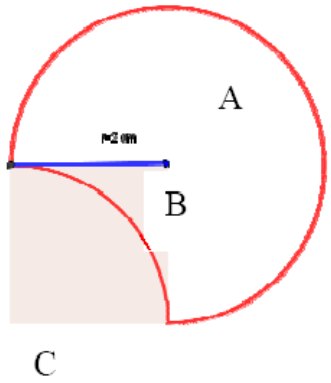
es más probable que un boleto con todas las cifras distintas salga premiado.

Si has estudiado combinatoria el problema se reduce a calcular las variaciones simples de 10 elementos tomados de 3 en 3
$V_{10,3} = 10.9.8 = 720$

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – COMIENDO GALLETAS**

La figura puede descomponerse de varias formas. Una de ellas es considerarla como:

A+B-C siendo A 3/4 de círculo. B el área del cuadrado de lado 2 y C el cuadrante de circunferencia.



$A = \frac{3}{4}\pi.2^2 = 3\pi\, cm^2$ $B = 2^2 = 4\, cm^2$ $C = \frac{1}{4}4\pi = \pi\, cm^2$ en total $2\pi + 4\, cm^2$

- **Solución - Fase 1 - (14/16) –JOVENES Y MENTIROSAS**

Analizando las cuatro afirmaciones el orden podría ser

A<C<B<D o A<B<C<D pero sabemos que solamente una miente.

Beatriz no puede mentir ya que entonces seria la mayor (y por tanto Ana mentiría también) o sería la pequeña (y mentiría Diana)

Carolina tampoco miente ya que entonces sería la más joven y mentiría simultáneamente con Diana.

Si Diana mintiese y no fuera la más joven ya hemos visto que entraría en contradicción con Beatriz.

Por tanto Ana es la que miente y Carolina es la mayor y Diana la más joven

- **Solución - Fase 1- (14/16) – 2012**

Este es un problema donde debes poner a prueba tu paciencia e ingenio. Vamos a dar alguna de las posibles soluciones pero puedes probar a ver si hay más.

Feliz $\{(9+5)^{8/4} +307/1\}*(6-2)$

Feliz $\{[6+7+(8*0)-1]^2+359\}*4$

Feliz $1024+\{(9\times5)-7\}\times\{(6\times3)+8\}$

Feliz $0+12^3 +(4*5*9)+(6+7)*8$

- **Solución - Fase 2 - (14/16) –¿NARANJA O LIMÓN?**

Sabiendo que al menos hay un caramelo de naranja en la bolsa la composición puede ser:

NNNN **N**NNL **N**NLL **N**LLL

Entonces hay que ver como pueden estar compuestas las bolsas (Sin contar el de naranja que ya sabemos que está seguro)

3 de naranja	NNN		
2 de naranja 1 limón	NNL	NLN	LNN
1 de naranja 2 de limón	NLL	LNL	LLN
3 de limón	LLL		

Por lo que las probabilidades de existencia de cada bolsa son:

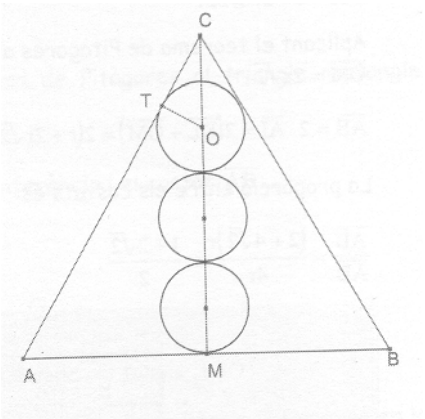
NNNN = 1/8 **N**NNL=3/8 **N**NLL=3/8 **N**LLL=1/8

A su vez en la primera bolsa la probabilidad de coger caramelo de naranja es 1, en la segunda 3/4 en la tercera 1/2 y en la cuarta 1/4.

Por lo que la probabilidad pedida será:

$$P(N)=\frac{1}{8}.1+\frac{3}{8}.\frac{3}{4}+\frac{3}{8}.\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – TRIÁNGULO Y CIRCUNFERENCIAS**



Sea $\overline{AB}$ el lado del triángulo, r el radio de la circunferencia y M el punto medio de $\overline{AB}$

Sea O el centro de la circunferencia superior y T el punto de tangencia con el triángulo.

$\overline{OM}=5r \quad \overline{OT}=r \quad \overline{OC}=2r$ (Semejanza de triángulos)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo

$\overset{\Delta}{AMC} \quad \overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \overline{CM}=\overline{OM}+\overline{OC}=7r$ de donde $7r=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{14}$

- **Solución - Fase 2 - (14/16) –NUMBERS**

Expresemos la primera y la segunda cifra del número buscado con la a, y la tercera y la cuarta con la b. Entonces el número será igual a

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b)$$

Este número es divisible por 11 y, por eso, (siendo un cuadrado e x acto) se divide también por 11^2. En otras palabras, el número 100a + b se divide por 11. Al emplear cualquier de los criterios de divisibilidad expuestos, deduciremos que el número a + b es divisible por 11.
Pero esto significa que

$$a + b = 11$$

por cuanto cada una de las cifras a, b es menor que diez.
La última cifra b que es un cuadrado e x acto, puede tomar los siguientes valores:

0, 1, 4, 5, 6, 9

Por eso, para la cifra a, que es igual a 11 - b, se encuentran los siguientes valores posibles:

11, 10, 7, 6, 5, 2

Los dos primeros valores son inaceptables, quedando, pues, los siguientes:

B = 4 a = 7
B = 5 a = 6
B = 6 a = 5
B = 9 a = 2

Vemos, en consecuencia, que el número de la matrícula debe ser alguno de éstos:

7744, 6655, 5566, 2299

Pero como los tres últimos no son cuadrados - el número 6655 es divisible por 5, pero no por 25; el 5566 se divide por 2, pero no por 4, y 2299 (producto de 12 · 19) tampoco es cuadrado - no queda más que 7744, segunda potencia de 88, que nos ofrece la solución del problema.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – DNI MATEMÁTICO**

Busquemos todas las soluciones posibles. Como el número, cada vez que lo recortemos para tener dos, cuatro, seis y ocho dígitos, es divisible por un número par, los únicos cuatro posibles dígitos pares (2, 4, 6, 8) ocupan esas posiciones, mientras que los cinco restantes ocupan las posiciones impares. Por las mismas razones, el quinto dígito no tiene más remedio que ser el cinco.

Para los dos primeros números tenemos, por tanto, 16 posibilidades: 12, 14, 16, 18, 32, 34, 36, 38, 72, 74, 76, 78, 92, 94, 96 y 98.

La tercera cifra debe ser impar, y sumar un múltiplo de 3 con las dos primeras. Así, algunas posibilidades quedan eliminadas, y otras tienen dos opciones: 123, 129, 147, 183, 189, 321, 327, 369, 381, 387, 723, 729, 741, 783, 789, 921, 927, 963, 981 y 987.

Si nos fijamos en que el número siguiente debe ser múltiplo de 4, sólo puede ser 2 o 6, por lo que casi duplica las posibilidades: 1236, 1296, 1472, 1476, 1832, 1836, 1892, 1896, 3216, 3276, 3692, 3812, 3816, 3872, 3876, 7236, 7296, 7412, 7416, 7832, 7836, 7892, 7896, 9216, 9276, 9632, 9812, 9816, 9872 y 9876.

El siguiente está claro que es un 5, y el siguiente número par debe sumar también un múltiplo de 3. Las posibilidades son 123654, 129654, 129654, 147258, 183654, 189654, 321654, 327654, 369258, 381654, 387654, 723654, 729654, 741258, 783654, 789654, 921654, 927654, 963258, 981654 y 987654.

Ahora, vamos a usar nuestra calculadora, para ir dividiendo entre 7 y calcular cuál ha de ser la cifra siguiente, para conseguir que sea divisible entre siete. Observa que esto es más difícil de lo que parece, porque debe ser un número impar diferente de 5 y que no esté repetido. Sólo quedan las siguientes posibilidades: 1296547, 1296547, 1472583, 3216549, 3816547, 7296541, 7836549, 9216543 y 9632581.

Ahora, necesitamos un dígito más, que haga que el resultado sea múltiplo de 8. En realidad, basta que, como antes, usemos el 2 y el 6. Siempre y cuando no estén repetidos, claro. Sólo nos queda 38165472. Ahora bien, el último número es fácil de poner, el que falta, ya que siempre sumará lo mismo y será un múltiplo de 9, en definitiva, 381654729.

> Posiblemente nos habríamos ahorrado mucho trabajo si hubiésemos notado que el 2 y el 6 deben estar en las posiciones 4 y 8.

- **Solución - Fase Final - (14/16) –BLANCO DE MIEDO.**

La probabilidad de sacar cara oculta blanca es
$P(B_o) = \frac{16}{55} + \frac{25}{55} \cdot \frac{1}{2} = \frac{57}{110}$ es decir ligeramente favorable a los condenados
Si sabemos que su cara visible es blanca, eso significa que no es una de las 14 fichas que tienen ambas caras negras, de forma que la probabilidad sólo debe calcularse sobre las restantes. Es decir, que se trata de una de las 41 restantes, y de ellas 25 tienen la otra cara negra. Por lo tanto, la probabilidad de salvarse es de 16/41, es decir, poco más del 39%.

- **Solución - Fase Final - (14/16) –ESTANQUE HELADO.**

Para resolver este problema, lo único que hay que hacer es utilizar el Teorema de Pitágoras y un poco de álgebra.

La idea es dividir el rectángulo en cuatro rectángulos cuyos vértices coinciden con el lugar en el que cayó la piedra.

Es sencillo entender que x, a, b y c son ahora las diagonales de los cuatro rectángulos, y sus lados están todos repetidos. Expresamos con cuatro ecuaciones las relaciones de Pitágoras de cada uno de los rectángulos.

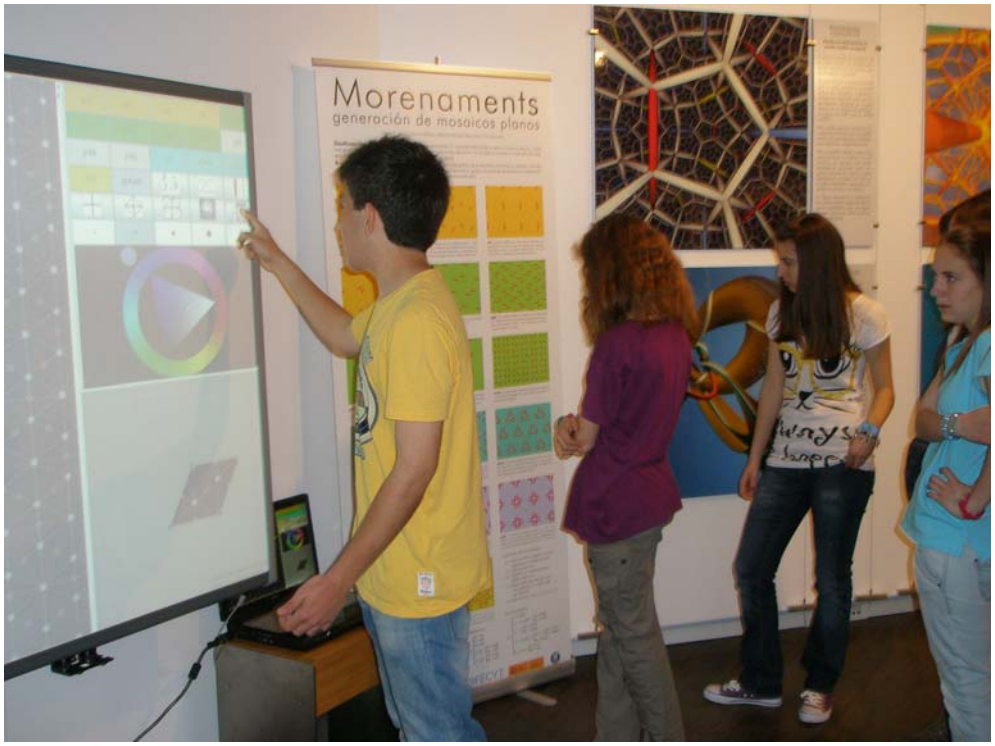
Las cuatro ecuaciones serán, poniendo a los lados de los rectángulos s, t, u y v, las siguientes: $x^2 = v^2 + s^2$, $a^2 = v^2 + t^2$, $c^2 = u^2 + s^2$ y $b^2 = u^2 + t^2$.

Restando la primera y la segunda ecuación, y la tercera y la cuarta, eliminamos las variables u y v, y quedan nuestras ecuaciones como $x^2 - a^2 = s^2 - t^2$ y $c^2 - b^2 = s^2 - t^2$.

Como vemos, ambas ecuaciones tienen la misma expresión en el lado derecho, por lo que de ellas se deduce que $x^2 - a^2 = c^2 - b^2$, por lo que $x^2 = a^2 + c^2 - b^2$.

De esta forma, podemos calcular fácilmente el valor de x.

Fotografías



En IMAGIRAY

Foto de grupo

Resolviendo problemas

Comprobando soluciones

Juan Alberto Guio Jorge Azaña y Pablo Hernández
Los representantes de Castilla la Mancha
en la Olimpiada nacional

COMISIÓN ORGANIZADORA:

Antonio Bueno Aroca
Bernardino Del Campo López
Jesús Carcelén Gandia
Jesús García Segovia
Joaquín Jiménez Ramos
Juan Martínez-Tébar Giménez
Juan Emilio García Jiménez
Carlos Motos Martínez-Esparza
Fco Javier Blázquez Merino
Juan Pablo Martínez Corchano
Ramón Cuenca Cuenca
Rafael Pérez Laserna
Serapio García Cuesta
Vicente Pascual Fidalgo

XXIII OLIMPIADA

DIPUTACIÓN DE ALBACETE