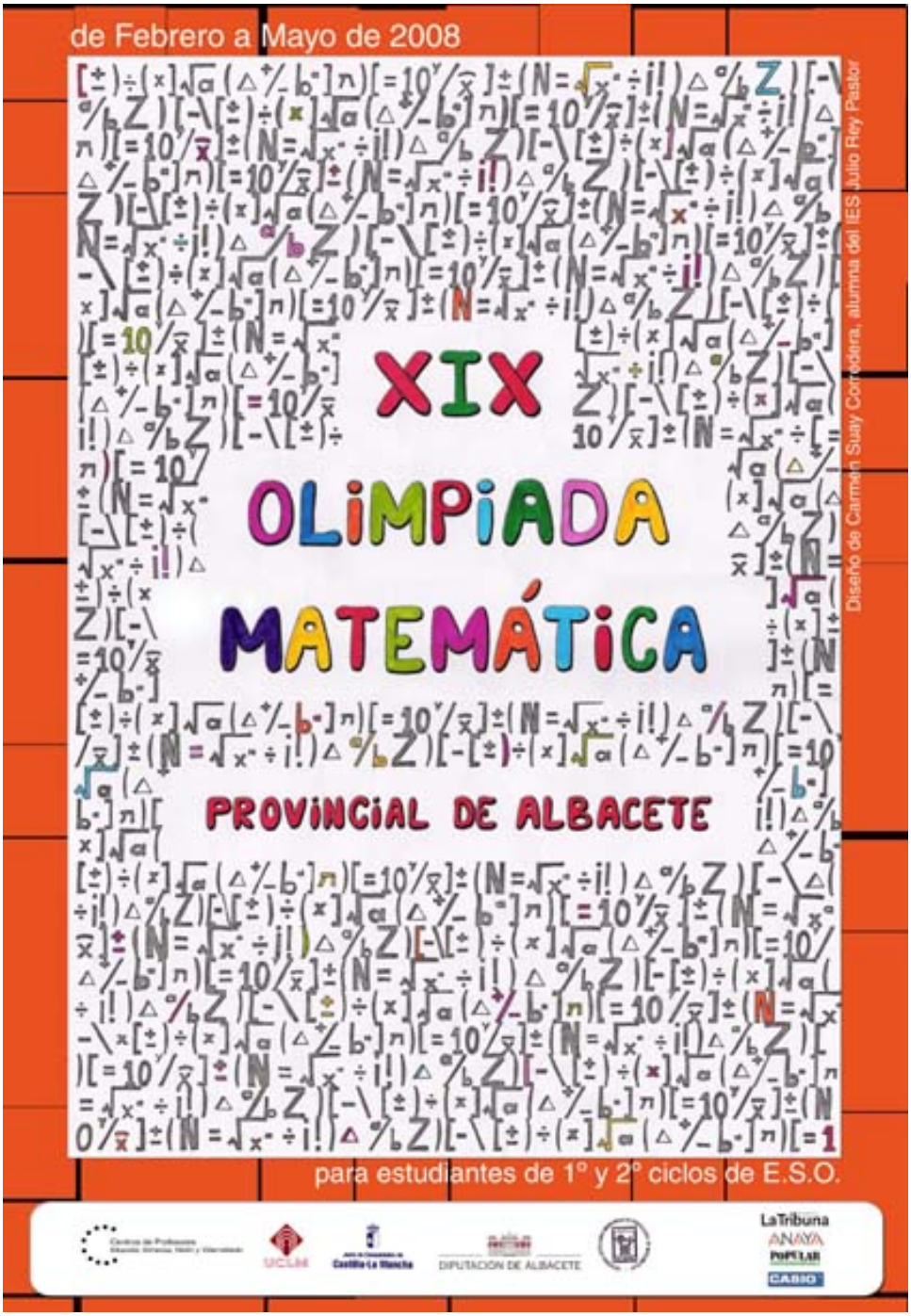


DIBUJO DECARMEN SUAY CORREDERA

Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
S.C.M.P.M.

LA COMISIÓN ORGANIZADORA:

Antonio Bueno Aroca
Bernardino Del Campo López
Jesús Carcelén Gandía
Jesús García Segovia
Joaquín Jiménez Ramos
Juan Martínez-Tébar Giménez
Juan Emilio García Jiménez
Juan José Fernández Romera
Juan Pablo Martínez Corchano
Martín Fernández Carrión
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta
Vicente Pascual Fidalgo

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete.

También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI.

Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes "resolutores", el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

.

En esta edición los finalistas han sido:

CICLO 12-14	CICLO 14-16
COLLADO MONTEJANO JOSÉ VICENTE	ATIENZAR MARTÍNEZ, ALEJANDRO
CORTIJO SEVILLA JAVIER	BARRERA RODRÍGUEZ , JESÚS
MANSILLA NAVARRO FRANCISCO	BEA SERRANO, CARLOS
MOLINA PÉREZ IGNACIO JOSÉ	CÓRCOLES FERNÁNDEZ, DAVID
PARRA GÓMEZ JOSE PEDRO	FERNÁNDEZ ESCOBAR, CARLOS
REINA MEGÍAS JAVIER	ILLÁN PÉREZ CRUZ MARÍA
RUBIO CUENCA ÁNGELES	MÁRQUEZ COSTA JUAN PABLO
SÁEZ AGULLÓ ÓSCAR	PÉREZ DE LOS COBOS HERMOSA CASSIUS MANUEL
TARRUELLA HERNÁNDEZ DIANA	SERRANO CHACÓN ALVARO MANUEL
TÉBAR MARTÍNEZ ROBERTO	SORRIBES RODRÍGUEZ INMACULADA

Profesores y alumnos finalistas en Tarazona de la Mancha

Este año se ha vuelto a convocar un concurso de carteles resultando ganadora Carmen Sauy Corredera. que aparece junto a David Córcoles Fernández que representó en 2007 a Castilla la Mancha en la XVIII Olimpiada Matemática Nacional celebrada en Pamplona.

Foto de los representantes albaceteños en la IX Olimpiada Matemática Regional celebrada en Guadalajara**. Roberto Tébar Martínez (tercero por la izquierda) fue a la Olimpiada Nacional en Murcia obteniendo Mención especial**

Como viene siendo habitual, las Matemáticas y los problemas han vuelto a salir a la calle, donde por medio del juego se han acercado a todos los públicos para enseñar y divertir.

Por esta actividad organizada por los profesores de la SCMPM y financiada por la CCM, pasaron más de 2200 alumnos de toda la provincia y un número indeterminado de público en general.

También nos han devuelto la visita a Villarrobledo nuestros amigos de Reggio Emilia, pertenecientes al Liceo "Aldo Moro" y la Escuela media "Einstein".

Los alumnos y los profesores de los dos países compartieron su gusto por las Matemáticas y disfrutaron con todo tipo de actividades lúdicas y culturales.

XIX Olimpiada Provincial de Albacete

Nivel 12/14

Primera Fase

Problema 1. LA LUNA DE ALBACETE
Problema 2. EL REPARTO DE LOS PANES Y LAS MONEDAS
Problema 3 SIEMPRE EXACTO
Problema 4. LAS CAJAS
Problema 5. CAPICÚAS
Problema 6 SOMBRAS

Segunda Fase

Problema 1. LA HORMIGA
Problema 2. PASTELES
Problema 3. EXTRAÑA VENTANA

Fase Final

Problema 1. CUADRANDO EL CÍRCULO
Problema 2 MATRÍCULAS ANTIGUAS
Problema 3.RECTÁNGULOS EN SERIE

Nivel 14/16

Primera Fase

Problema 1. NO ES PARA TANTO
Problema 2. UN CUENTO ENMARAÑADO
Problema 3. DISECCIONES
Problema 4. 1,2,3… RESPONDA OTRA VEZ
Problema 5. EL TELÉFONO DE MI COLEGA
Problema 6. EL CAMPAMENTO DE LOS LÍOS

Segunda Fase

Problema 1. CORONA
Problema 2. LA TIRA DE NUEVES
Problema 3. ¿CARA O CRUZ?

Fase Final

Problema 1. IMPARES
Problema 2. A POR AGUA A LA FUENTE
Problema 3. AL TEATRO

Soluciones

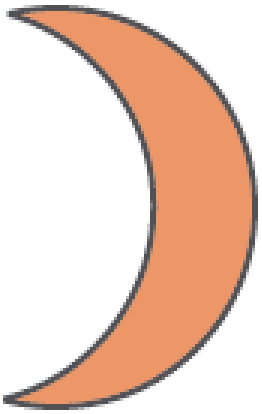
XIX Olimpiada

Tarazona de la Mancha 2008

Nivel 12/14

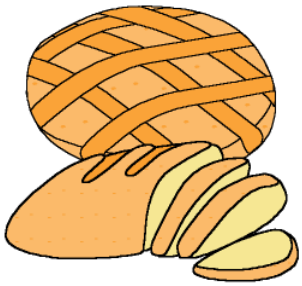
Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. LA LUNA DE ALBACETE
¿Podrías dividir la luna de Albacete en seis trozos con sólo dos líneas rectas?



F.1 (12/14) Problema 2. EL REPARTO DE LOS PANES Y LAS MONEDAS

Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino pone 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido.
Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo.
Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes.

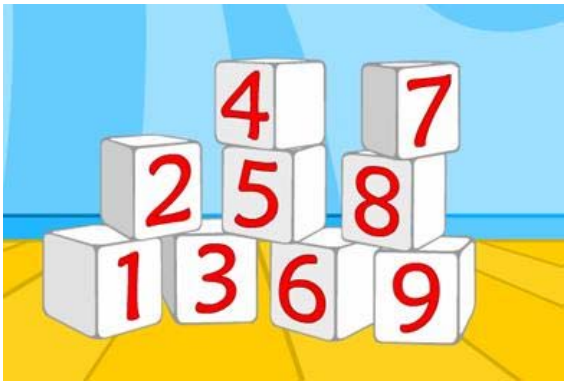


¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo?

F.1 (12/14) Problema 3. SIEMPRE EXACTO

Encontrar los menores 9 números consecutivos (mayores que 10), el primero terminado en 1,....., y el mayor terminado en 9, de manera que al dividirse por su última cifra, el resultado de siempre exacto.

Ejemplo: 31/1 si, 32/2 si, 33/3 si, 34/4 no,....



F.1 (12/14) Problema 4. LAS CAJAS

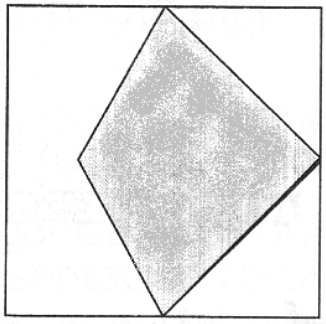
Una fábrica realiza cajas en forma de paralepípedo de distintos tamaños. Sabiendo que la medida de sus aristas puede ser cualquier número entero de 1 al 10 ¿cuántas cajas distintas puede realizar?

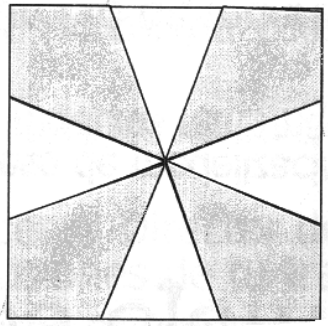
F.1 (12/14) Problema 5. CAPICÚAS

A los números como 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se les llama capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11 ¿es cierto?

F.1 (12/14) Problema 6. SOMBRAS

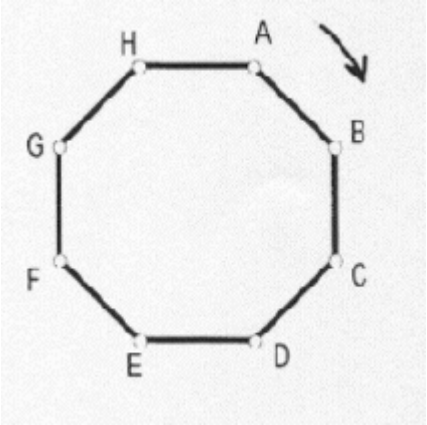
Cada cuadrado tiene de área 1
¿Qué parte del total de cada cuadro representa el área sombreada?





Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. LA HORMIGA



Una hormiga camina por el borde de un plato de 8 lados iguales como el de la figura. Cada lado del plato mide 14 cm. La hormiga sale del vértice A y camina en el sentido que indica la flecha, siempre por el borde del plato. Hace la primera parada, antes de llegar a B, a 6 cm del vértice A y después, cada 6 cm hace una parada. En total hace 2000 paradas.

a) ¿Cuántas veces para en el vértice A?.

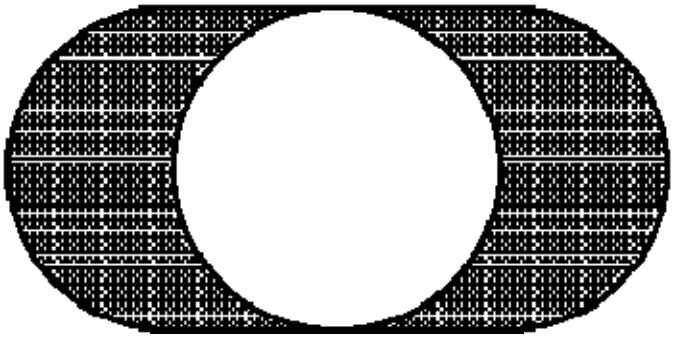
b) ¿En qué otros vértices hace la misma cantidad de paradas que en A?.

F.2 (12/14) Problema 2. PASTELES

Un pastelero tiene seis bandejas con pasteles; unas bandejas son de pasteles de nata y otras son de pasteles de chocolate. El número de pasteles de cada bandeja es 6, 12, 14, 15, 23 y 29.
El pastelero señala con el dedo una de las bandejas y dice: "Si vendo esta bandeja de pasteles, me quedarán doble número de pasteles de chocolate que de nata".
¿Sabrías decir (razonando tu respuesta) cuál es la bandeja que señaló el pastelero?

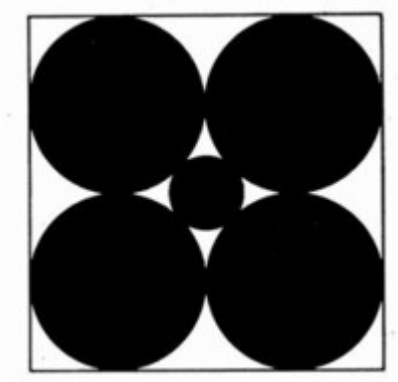
F.2 (12/14) Problema 3. EXTRAÑA VENTANA

Unos pintores están decorando las paredes interiores de una catedral. A una ventana circular de un metro de diámetro le añadieron dos líneas tangentes y dos semicírculos cerrando la figura. ¿Qué área tiene la figura sombreada?



Fase Final

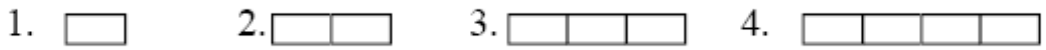
F.F (12/14) Problema 1. CUADRANDO EL CÍRCULO
Sabiendo que el lado del cuadrado mide 1 metro calcula el radio del círculo pequeño y el área que queda en blanco dentro del cuadrado



F.F (12/14) Problema 2. MATRÍCULAS ANTIGUAS

Para el carnaval de Tarazona de la Mancha se organiza una carrera de coches antiguos. Al encontrarse tres aparcados un chófer se da cuenta de lo siguiente:
Hay una matrícula con dos dígitos, otra con tres y otra con cinco.
Las tres matrículas contienen los diez dígitos (del 0 al 9).
Si multiplicamos los números que forman la primera y segunda matrícula obtenemos el número de la tercera.
Y el número de la segunda matrícula es un múltiplo del de la primera.
¿Podrías decirme razonadamente cuáles son las matrículas antiguas?

F.F (12/14) Problema 3. RECTÁNGULOS EN SERIE
Cuántos rectángulos hay en cada una de las figuras siguientes?:



¿Cuántos habrá en el paso 10?

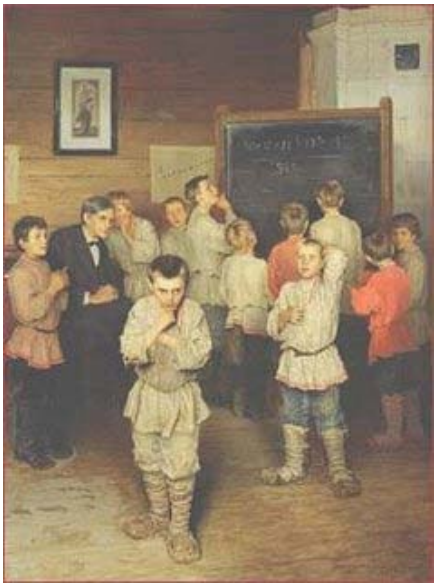
Encuentra una regla para calcularlos y explícala.

¿Puedes generalizarlo para saber cuántos rectángulos hay en un paso cualquiera?

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. NO ES PARA TANTO
Al contemplar el cuadro titulado ***"Ejercicio complicado"*** de Bogdánov-Belski podemos observar en la pizarra la expresión:



$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

- ¿Podrías resolverla mentalmente?
- Indica los pasos que has seguido para descomponer la operación en otras más sencillas.

Los números 10, 11, 12, 13 y 14 cumplen la propiedad:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

lo cual simplifica el cálculo mental propuesto anteriormente.

¿Es esta la única serie de números consecutivos que cumple esta propiedad?

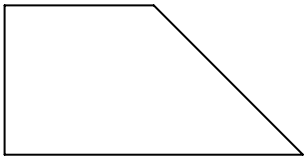
F.1 (14/16) Problema 2. UN CUENTO ENMARAÑADO

Este problema aparece en la obra "Un cuento enmarañado" del matemático inglés Lewis Carroll. También se hace referencia a él en la novela de misterio y trama matemática "La incógnita Newton" de Catherine Shaw. (Podéis leer ambos libros, son muy entretenidos)

La Colina: Dos viajeros tardan desde las 3 hasta las 9 en recorrer un camino llano, subir una colina y volver a casa, siendo su velocidad en la llanura de 4 millas por hora, de 3 subiendo la colina y de 6 bajando la colina. Hallar la distancia recorrida y también, con un margen de error de media hora, la hora en que alcanzan la cima de la montaña.

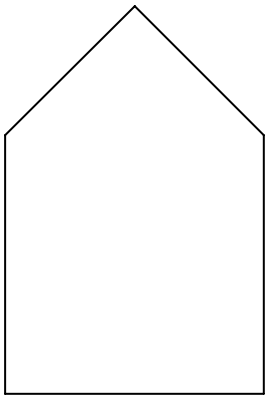
F.1 (14/16) Problema 3. DISECCIONES

Mira esta figura:



¿Podrías cortarla en cuatro partes de la misma forma y tamaño?

Mira ahora esta otra:



¿Podrías cortarla en la menor cantidad posible de partes para que, recomponiendo estos trozos y sin que sobre ninguno de ellos, se forme un cuadrado?

F.1 (14/16) Problema 4. 1,2,3… RESPONDA OTRA VEZ

El concursante de un programa televisivo debe elegir entre tres puertas. Una de ellas encierra un coche y en las otras dos hay un par de cabras.

Una vez que el concursante ha elegido una puerta, el presentador abre otra de las puertas donde él sabe que hay una cabra y da al concursante la oportunidad de cambiar la puerta que eligió inicialmente.
Intuitivamente parece que el hecho de cambiar o no cambiar es indiferente y que, en ambos casos, la probabilidad de ganar es 1/2.
Sin embargo, en este problema la intuición falla: el concursante debe cambiar de puerta si quiere tener más probabilidades de ganar el coche.
¿Podrías explicar por qué ocurre esto?

F.1 (14/16) Problema 5. EL TELÉFONO DE MI COLEGA

Le pedí a mi amigo su número de teléfono (que tiene 7 cifras). Como es un gran profesor de matemáticas, me contestó diciendo:

"El número que forman las cifras de las posiciones 4 y 5 es un cuadrado perfecto, al igual que el de las posiciones 5 y 6 y el de las posiciones 6 y 7. Las tres primeras cifras forman un cubo perfecto que es igual al producto de los otro cuatro dígitos".

¿Cuál es el teléfono de mi amigo?

F.1 (14/16) Problema 6. EL CAMPAMENTO DE LOS LIOS

En un campamento juvenil los campistas son un poco desastres a la hora de lavar los platos y ocurre que cada campista se dirige al fregadero lava su plato, lo seca y lo deja allí, el siguiente campista hace lo mismo pero al lavar su plato moja todos los que había allí depositados con lo que tiene que secarlos todos y los siguientes realizan la misma operación, si en lavar un plato se tarda un minuto y en secarlo dos.

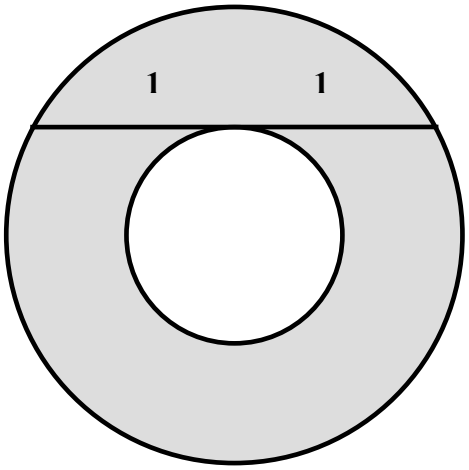
a)¿Cuánto tiempo tardaron los 50 alumnos del campamento en terminar .

b) Serías capaz de dar una fórmula para el caso de que *haya **n** alumnos*

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. CORONA

Supongamos dos circunferencias concéntricas. Trazamos una tangente a la interior que, naturalmente cortará a la exterior en dos puntos. La distancia entre cualquiera de estos puntos y el punto de tangencia es 1 m. Halla el área de la corona circular que determinan las dos circunferencias



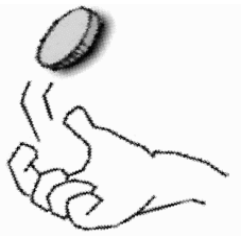
F.2 (14/16) Problema 2. LA TIRA DE NUEVES

Si el número 999 …. 9 tiene 500 cifras. ¿Cuántas cifras tiene el número (999 … 9)² - 1 ?

F.2 (14/16) Problema 3. ¿CARA O CRUZ?

Dos jugadores se han encontrado un trébol de cuatro hojas. Los dos lo quieren para que les de suerte y deciden jugárselo a cara o cruz. Como solamente llevan una moneda cargada (un lado tiene más posibilidades de salir que el otro) no saben como sortearlo. Uno de ellos le dice:"Ya se como hacerlo para que resulte un sorteo justo. Tiraremos la moneda mas de una vez"

¿Podrías explicar por qué?



Fase Final

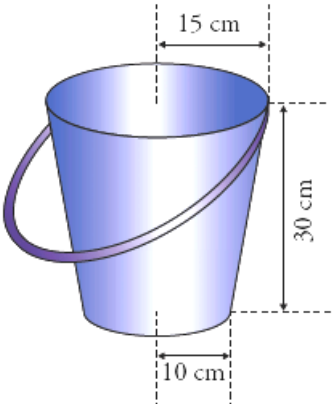
F.F (14/16) Problema 1. IMPARES

¿Podrías probar que cualquier número impar se puede poner como la diferencia de dos cuadrados?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
31 33 ...

F.F (14/16) Problema 2. A POR AGUA A LA FUENTE

María va a por agua a la Plaza Mayor de Tarazona de la Mancha con un cubo como el de la figura y lo llena. Unos niños están jugando con una pelota de 10 cm de radio que acaba dentro del cubo sumergiéndose totalmente. Calcula la cantidad de agua que se derrama y la cantidad de agua que queda en el cubo.



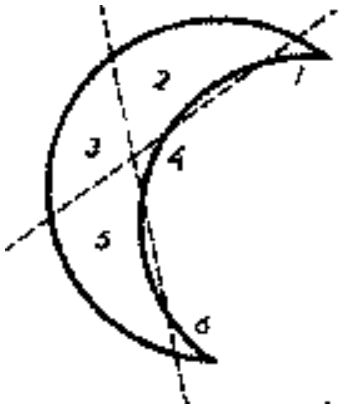
F.F (14/16) Problema 3. AL TEATRO

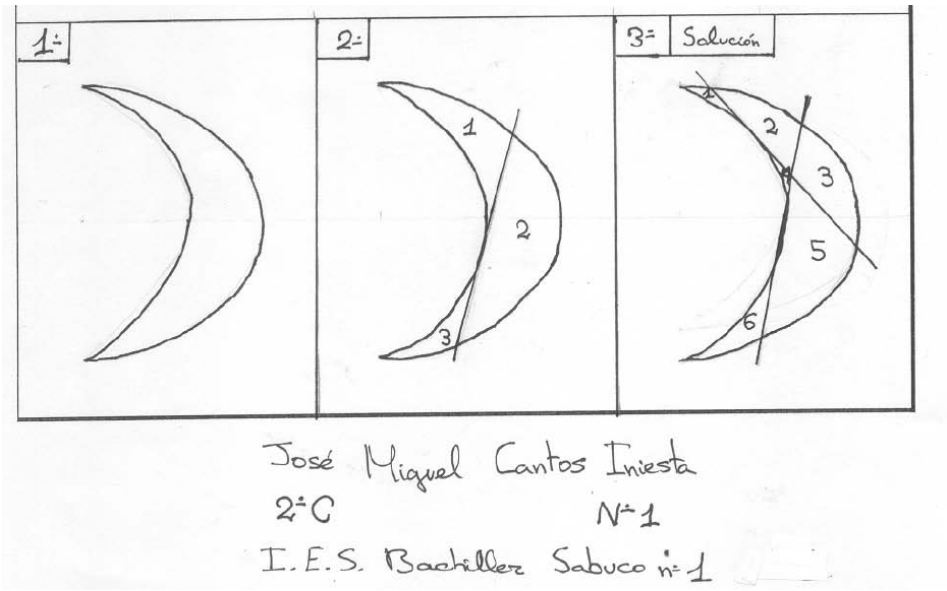
En Albacete se ha estado representando "Alicia en el país de las maravillas" durante 20 días, en una sesión diaria. Pedro y María fueron a ver la obra de teatro por separado, pues no se conocían. Sabiendo que el teatro en el que se representó tiene 30 filas y 28 asientos en cada fila y no tiene ningún pasillo, ¿cuál es la probabilidad de que hayan ido a la misma sesión y se hayan sentado uno al lado del otro?

¿Y si el teatro está dividido en dos partes, derecha e izquierda (números pares e impares), separadas por un pasillo central?

Soluciones

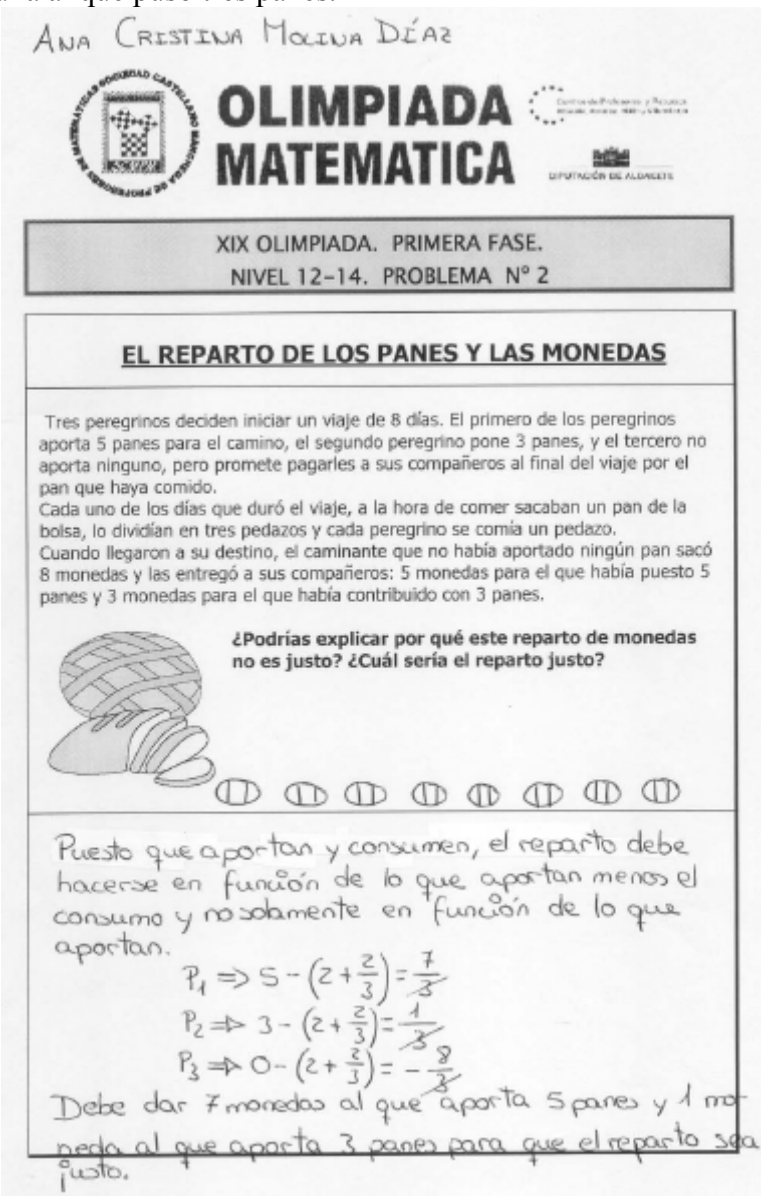
- **Solución - Fase 1 - (12/14) –LA LUNA DE ALBACETE**





- **Solución - Fase 1 - (12/14) – EL REPARTO DE LOS PANES Y LAS MONEDAS**

Cada día cogían un pan y lo repartían en tres trozos, y cada uno de los peregrinos se comía uno.
El primer peregrino puso 5 panes, luego aportó 15 pedazos de pan en total; el segundo caminante puso 3 panes, es decir, 9 pedazos.
Por tanto, juntaron 24 trozos de pan, de los cuales cada uno de los tres compañeros comió 8 (uno por día).
El primer peregrino aportó 15 pedazos, pero se comió 8, luego en realidad sólo dio 7 trozos de pan. El segundo peregrino entregó 9 pedazos, pero como comió 8 trozos durante el viaje, realmente sólo dio 1 trozo.
En consecuencia, de las ocho monedas que entregó el compañero que no había puesto pan, siete corresponden al caminante que puso cinco panes y sólo una al que puso tres panes.



ANA CRISTINA MOLINA DÍAZ

OLIMPIADA MATEMATICA

XIX OLIMPIADA. PRIMERA FASE.
NIVEL 12-14. PROBLEMA Nº 2

EL REPARTO DE LOS PANES Y LAS MONEDAS

Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino pone 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido.
Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo.
Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes.

¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo?

Puesto que aportan y consumen, el reparto debe hacerse en función de lo que aportan menos el consumo y no solamente en función de lo que aportan.

$P_1 \Rightarrow 5-\left(2+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3}$

$P_2 \Rightarrow 3-\left(2+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$P_3 \Rightarrow 0-\left(2+\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}$

Debe dar 7 monedas al que aporta 5 panes y 1 moneda al que aporta 3 panes para que el reparto sea justo.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – SIEMPRE EXACTO**

Basta calcular el menor número múltiplo de 10 que sea también múltiplo de 9, 7 y 8. Esto es: 9 x 8 x 7 x 5 = 2520.

Luego los números pedidos serían: 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528 y 2529

SIEMPRE EXACTO

Encontrar los menores 9 números consecutivos (mayores que 10), el primero terminado en 1,..., y el mayor terminado en 9, de manera que al dividirse por su última cifra, el resultado de siempre exacto.

El número lo conseguimos haciendo el m.c.m. de los números 2,3,4,5,6,7,8 y 9:

$\cdot 2 = 2$
$\cdot 3 = 3$
$\cdot 4 = 2^2$
$\cdot 5 = 5$
$\cdot 6 = 2 \cdot 3$
$\cdot 7 = 7$
$\cdot 8 = 2^3$
$\cdot 9 = 3^2$

m.c.m. $(2,3,4,5,6,7,8,9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{2520}$.

- 2521/1: sí; Porque todos los números son divisibles entre uno.
- 2522/2: sí; Porque todos los números que acaban en cifra par, son divisibles entre dos.
- 2523/3: sí; Porque todos los números que al sumar todas sus cifras dan números divisibles entre tres, son divisibles entre tres.
- 2524/4: sí; Porque todos los números que sus dos últimas cifras son divisibles entre cuatro, son divisibles entre cuatro.
- 2525/5: sí; Porque todos los números que acaban en cero o en cinco son divisibles entre cinco.
- 2526/6: sí; Porque todos los números que son divisibles entre dos y entre tres, son divisibles entre seis.
- 2527/7: sí; Porque todos los números que cuando al suprimir la última cifra y restar del número que queda el doble de la cifra suprimida, son divisibles entre siete.
- 2528/8: sí; Porque todos los números que su mitad es divisible entre cuatro, son divisibles entre ocho.
- 2529/9: sí; Porque todos los números que al sumar todas sus cifras dan números divisibles entre nueve, son divisibles entre nueve.

Ana María Jiménez Pastor 2ºeso A I.E.S. Andrés de Vandelvira

XIX OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – LAS CAJAS**

. Para resolver el problema hemos de organizarnos. Así tenemos tres tipos de cajas.

a) Cajas con las tres dimensiones iguales, por tanto serán CUBOS. Hay 10 distintas

b) Cajas con dos aristas iguales y la otra desigual. Hay 10 maneras de elegir las aristas iguales y 9 maneras de elegir la arista desigual. Por tanto hay 10.9 = 90 cajas distintas.

c) Cajas con las tres aristas desiguales. Tenemos que elegir tres números distintos entre los 10, por tanto el número de cajas coincidirá con el número combinatorio de 10 elementos en grupos de 3. Por tanto tenemos 120 cajas distintas. Luego el número total de cajas es igual a **10+90+120 = 220 cajas**.

Si queremos considerar que las cajas tienen tapa, el problema se complica un poco más.

a) Las cajas cúbicas siguen siendo 10.
b) Cada caja con dos aristas iguales y una desigual puede tener dos tapas diferentes por lo que pasarían a ser 180 cajas.
c) Las cajas con tres aristas diferentes se verían multiplicadas por tres si consideramos las diferentes tapas siendo 360 quedando en total **550 cajas diferentes**

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – CAPICÚAS**

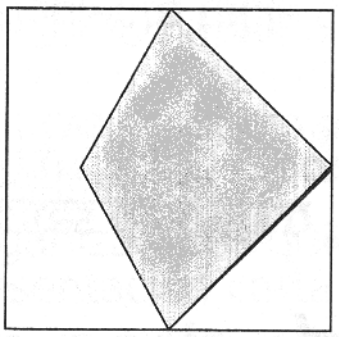
Todo número capicúa de cuatro cifras tiene la forma ABBA, donde A y B son dos dígitos distintos o iguales. Tal número lo podemos expresar como:

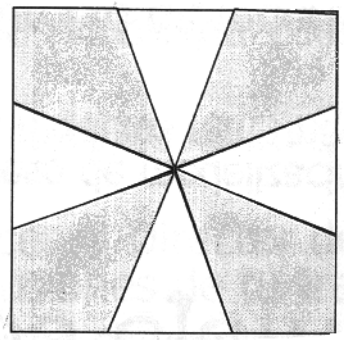
$$1000A + 100B + 10B + A =$$
$$(1000 + 1)A + (100 + 10)B =$$
$$1001A + 110B = 11x91A + 11x10B =$$
$$11(91A + 10B)$$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) –SOMBRAS**

En la primera figura, si trazamos una línea que divida el cuadrado por la mitad observaremos que nos divide a la figura sombreada en dos triángulos.
El de la izquierda con base 1 y altura 1/4 por lo que su superficie es de 1/8 u^2
El de la derecha tiene base 1 y altura 1/2 por lo que su superficie es de 1/4 u^2
Siendo la superficie sombreada 3/9 u^2

En la segunda figura es más sencillo fijarnos en los cuatro triángulos no sombreados.
Tienen base 1/3 y altura 1/2 por lo que su superficie total será S= 4.1/2.1/2.1/3= 1/3 u^2
Por lo que la superficie sombreada será 2/3 u^2





- **Solución - Fase 2 - (12/14) – LA HORMIGA**

a) Para dar una vuelta completa y pasar por A ha debido recorrer 112 cms. Los puntos de parada son múltiplos de 6. Así pues, la primera vez que para en A se producirá en el mínimo común múltiplo de 6 y 112, esto es en 336.

Es decir, la primera parada en A se produce a la 3ª vuelta y después de 56 paradas. Por tanto el nº de veces que parará en A: Ent(2000/56) = 35 paradas

b) Para llegar a B ha debido recorrer 14 + 112n , siendo n el nº de vueltas dadas.

El menor valor de n que da un múltiplo de 6 es n= 1. Lo que nos dice que la hormiga se detiene en B en la 2ª vuelta y después de haber realizado 21 paradas.

A partir de aquí el problema se reduce al apartado a): la hormiga volverá a parar en B al cabo de otras 3 vueltas y después de 56 paradas.

Por tanto, el nº de veces que para en B será: 1 + Ent((2000-21)/56) = 36 paradas.

Para llegar a C ha debido recorrer 28 + 112n , siendo el nº de vueltas dadas.

El menor valor de n que da un múltiplo de 6 es n=2. Lo que nos dice que la hormiga se detiene en C en la 3ª vuelta y después de haber realizado 42 paradas

A partir de aquí el problema se reduce al apartado a): la hormiga volverá a parar en C al cabo de otras 3 vueltas y después de 56 paradas. Por tanto, el nº de veces que para en C será: 1 + Ent((2000-42)/56) = 35 paradas. Con un razonamiento análogo se llega a que en los punto A, C y F realiza 35 paradas

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – PASTELES**

El número total de pasteles es 6 + 12 + 14 + 15 + 23 + 29 = 99.
Llamemos x al número de pasteles de la bandeja que vende el pastelero.
El número de pasteles que quedan (c de chocolate y n de nata) será, entonces:

$$99 - x = c + n = 2n + n = 3n.$$

Por tanto, $x = 99 - 3n \;\Rightarrow\; x = \dot{3}$ (múltiplo de 3). Es decir, los posibles valores de x son los correspondientes a las bandejas de 6, 12 ó 15 pasteles. Probemos con estos tres casos:

a) $x = 6$ pasteles: $99 - 6 = 3n \;\Rightarrow\; n = 31$ pasteles de nata (y 2·31=62 pasteles de chocolate).
¿Es posible conseguir los números 31 y 62 con los pasteles de las bandejas que quedan al quitar la bandeja de 6 pasteles, es decir, con los números 12, 14, 15, 23 y 29?
Es evidente que no podemos conseguir el número 31, por tanto la solución no es $x = 6$.

b) $x = 12$ pasteles: $99 - 12 = 3n \;\Rightarrow\; n = 29$ pasteles de nata (y 2·29=58 pasteles de chocolate).
¿Es posible conseguir los números **29** y **58** con los pasteles de las bandejas que quedan al quitar la bandeja de 12 pasteles, es decir, con los números 6, 14, 15, 23 y 29?
Sí es posible, y además de varias formas:

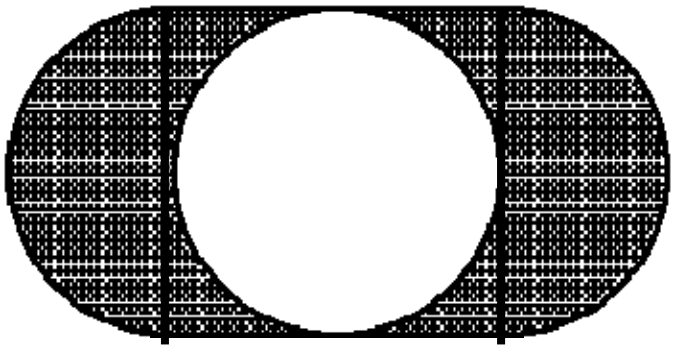
Nata	**Chocolate**
29 = 29	**58** = 6 + 14 + 15 + 23
29 = 6 + 23	**58** = 14 + 15 +29
29 = 14 + 15	**58** = 6 + 23 + 29

c) $x = 15$ pasteles: $99 - 15 = 3n \quad \Rightarrow \quad n = 28$ pasteles de nata (y 2·28=56 pasteles de chocolate).
¿Es posible conseguir los números 28 y 56 con los pasteles de las bandejas que quedan al quitar la bandeja de 15 pasteles, es decir, con los números 6, 12, 14, 23 y 29?
Es evidente que no podemos conseguir el número 28, por tanto la solución no es $x = 15$.

En resumen, la bandeja que señaló el pastelero es la de 12 pasteles.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – EXTRAÑA VENTANA**

Basta trazar el cuadrado en el que está inscrita la ventana circular para comprobar que el área sombreada es 1 m^2



- **Solución - Fase Final - (12/14) – CUADRANDO EL CÍRCULO**

Por Teorema de Pitágoras se obtiene que el radio de la circunferencia pequeña es: $r = \frac{\sqrt{2}-1}{4} m = 0.1035m$

El radio de las circunferencias mayores es 1/4 por lo que el área en blanco es:

$$S = 1 - \left(4.\pi \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \pi . \left(\frac{\sqrt{2}-1}{4} \right)^2 \right) \cong 0.18m^2$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) – MATRICULAS ANTIGUAS**

Este es un problema que requiere de bastante paciencia y laboriosidad, Hay que emplear varias estrategias para delimitar los dos primeros números, como que no empiecen ni acaben en 0, que no acaben en 1 etc.…
Con las dos primeras características podemos obtener los siguientes productos:

27 x 594 = 16038	52 x 367 = 19084
36 x 495 = 17820	54 x 297 = 16038
39 x 402 = 15678	63 x 927 = 58401
45 x 396 = 17820	78 x 345 = 26910
46 x 715 = 32890	

Pero solamente en el primero 594 es múltiplo de 27 (27 x 22 = 594) por lo que las matrículas son **27, 594 y 16038**

- **Solución - Fase Final - (12/14) – RECTÁNGULOS EN SERIE**

Para poder contar los rectángulos diferentes vamos a numerarlos

1	2	3	4	…	n

El que está formado por un rectángulo solamente tiene una posibilidad **1→1 rectángulo**

Cuando son dos $\begin{cases} 12 \\ 1\ y\ 2 \end{cases}$ un rectángulo formado por dos rectángulo (**12**) y dos formados por uno solo (**1y 2**)**→1+2=3 rectángulos**

Cuando son tres $\begin{cases} 123 \\ 12,23 \\ 1,2,3 \end{cases}$ **→1+2+3= 6 rectángulos**

Con cuatro $\begin{cases} 1234 \\ 123,234 \\ 12,23,34 \\ 1,2,3,4 \end{cases}$ **→1+2+3+4= 10 rectángulos**

Lo que observamos es que sumamos los números naturales menores o iguales que el número de rectángulos que forman la figura.

Para diez serán →1+2+3+4+5+6+7+8+9+10= 55 rectángulos

Si generalizo para n rectángulos tendré $S_n = \frac{1+n}{2}.n = \frac{n^2+n}{2}$

- **Solución - Fase 1 - (14/16) –NO ES PARA TANTO**

La resolución mental de esta operación pasa, sin lugar a dudas, por tener una gran confianza en nuestras posibilidades, ya que, lo que al principio puede parecer una tarea complicada, a medida que se avanza en el cálculo se simplifica, si tenemos el temple suficiente para ver las posibilidades de simplificación y aprovecharlas.

Lo más natural en estos casos es comenzar a operar mentalmente, almacenando resultados que iremos acumulando hasta donde nuestra memoria nos permita, por ello lo primero sería hace el cuadrado de 10, obteniendo 100, y el cuadrado de once, obteniendo 121, sumar estas dos cantidades no es complicado, así podemos calcular el cuadrado de doce, que es 144, y sumar esta cantidad a la que habíamos obtenido anteriormente. La suma que debemos realizar mentalmente es 221+144, y no es difícil concluir que el resultado es 365, justamente el denominador de la expresión que se nos presenta.

Por tanto, la primera parte del razonamiento nos lleva a transformar, mentalmente, la expresión inicial en esta otra, más sencilla:

$$1+\frac{13^2+14^2}{365}$$

Fijándonos ahora en la propiedad que aparece en el enunciado de este problema, o simplemente continuando con el cálculo mental, llegamos fácilmente a la conclusión de que el resultado de la operación propuesta es 2.

Se trata ahora de buscar más series de números que cumplan la propiedad del enunciado, para ello podemos utilizar el álgebra, planteando la ecuación siguiente:

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=(n+2)^2+(n+3)^2$$

Desarrollando los cuadrados y agrupando en cada término tenemos:

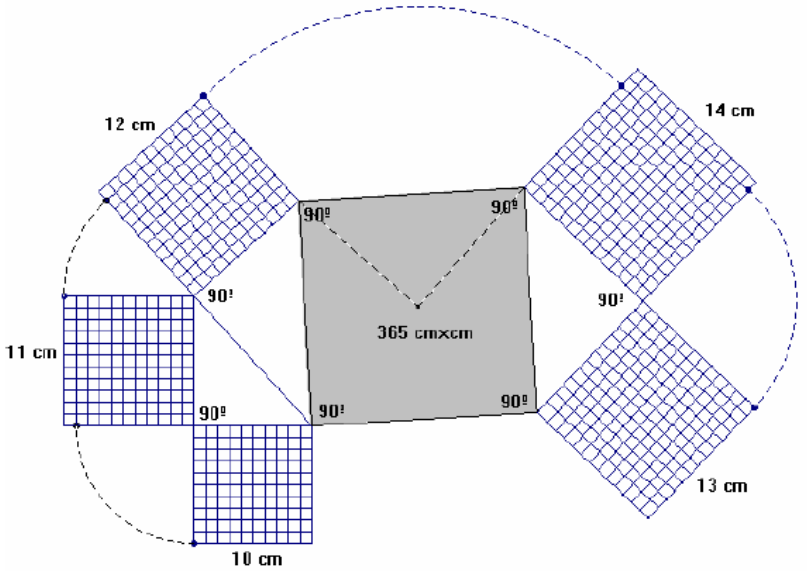
$$3n^2+2=2n^2+10n+13$$

Quedando entonces la ecuación de segundo grado $n^2-10n-11=0$, cuyas soluciones son 11 y –1.

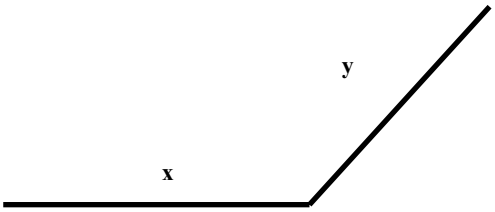
Para n=11 se obtiene la serie del enunciado del problema: 10, 11, 12 13 y 14.
Mientras que para n= –1 se obtiene la serie: –2, –1,0, 1 y 2.

INTERPRETACIÓN GEOMERICA DE LA IGUALDAD (Cabri-geomètre II)

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$



- **Solución - Fase 1 - (14/16) – UN CUENTO ENMARAÑADO**



Llamo **x** a la distancia en millas que son llanas e **y** a distancia que recorren subiendo la colina, Sabiendo que tardan 6 horas en subir y bajar
tengo

$$\begin{cases} v = \dfrac{e}{t} \rightarrow t = \dfrac{e}{v} \\ 6 = 2\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{y}{6} \rightarrow 12 = x + y \end{cases}$$

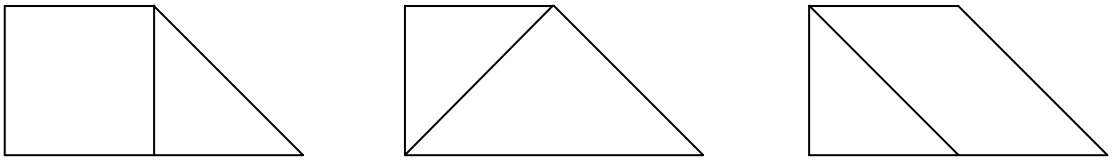
La distancia total en llano y en cuesta es de 12 millas. Para saber como pueden estar repartidas y averiguar a que hora llegan a la cima construyo una tabla tomando solamente valores enteros de x. Sabiendo que salen a las 15h y que el tiempo de subida es $t = \frac{x}{4} + \frac{y}{3}$ obtendré los siguientes tiempos posibles en los que alcanzan la cumbre de la colina

x (llano)	y (cuesta)	15+t (hora de llegada a la cima)
1	**11**	**18:55 h**
2	**10**	**18:50 h**
3	**9**	**18:45 h**
4	**8**	**18:40 h**
5	**7**	**18:35 h**
6	**6**	**18:30 h**
7	**5**	**18:25 h**
8	**4**	**18:20 h**
9	**3**	**18:15 h**
10	**2**	**18:10 h**
11	**1**	**18:05 h**

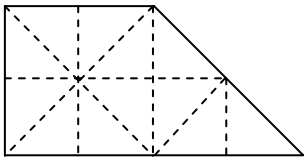
Podemos comprobar que la cumbre se puede alcanzar entre las 18:05 h y las 18:55h.
Si en vez de valores enteros tomo cualquier valor de x tales que $0<x<12$ observamos que dependiendo de la distribución, podrán llegar a la cima en cualquier momento comprendido entre las **18 h y las 19 h.** Esta es la razón por la que en el problema nos piden un margen de media hora para dar la solución. Respondiendo entonces con este margen de 30 minutos arriba o abajo, **llegan a la cima de la colina a las 18:30h.**

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – DISECCIONES**

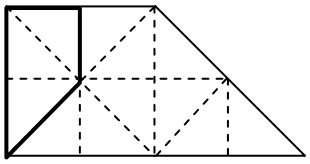
La primera figura es una forma muy común, sobre todo para aquellos que hayan jugado al Tamgram alguna vez, ya que se puede obtener como combinación de piezas de las formas:



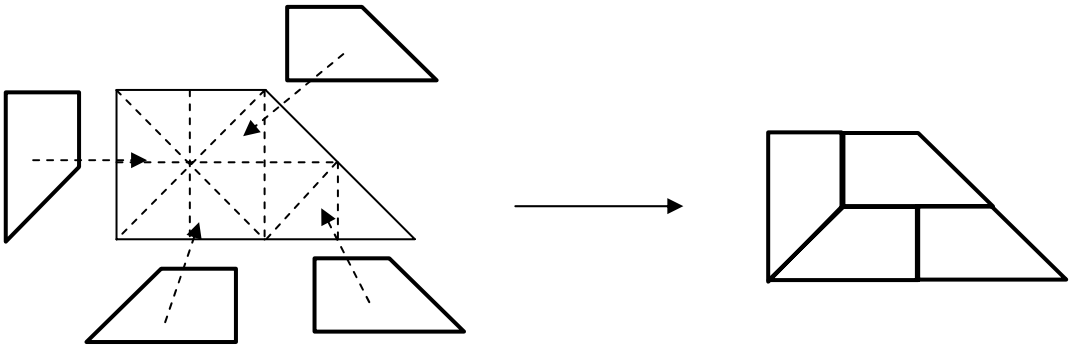
En este caso se nos pide cortarla en cuatro pieza de la misma forma y tamaño, para ello podemos descompones la figura en triángulos elementales :



y utilizar esta idea para “visualizar” la forma siguiente:

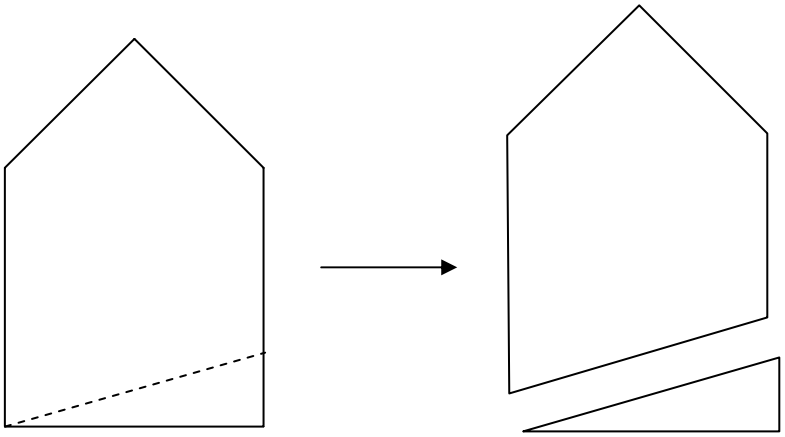


Tomando ahora cuatro piezas similares podemos reconstruir la figura original tal y como se nos pedía:

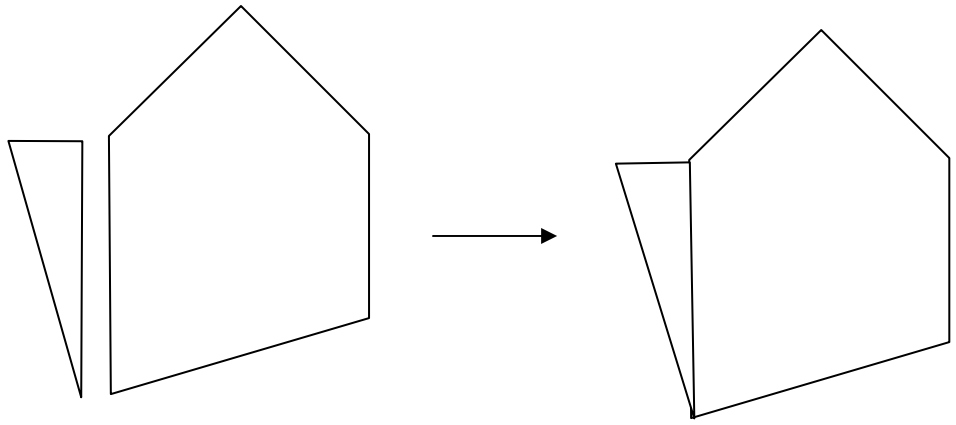


Para cortar la segunda figura de modo que se cumplan las condiciones dadas es preciso tener una “idea feliz”. No es tarea sencilla, pero estudiando la figura y probando, podemos desarrollar un razonamiento que nos lleve a la solución. Veamos un modo.

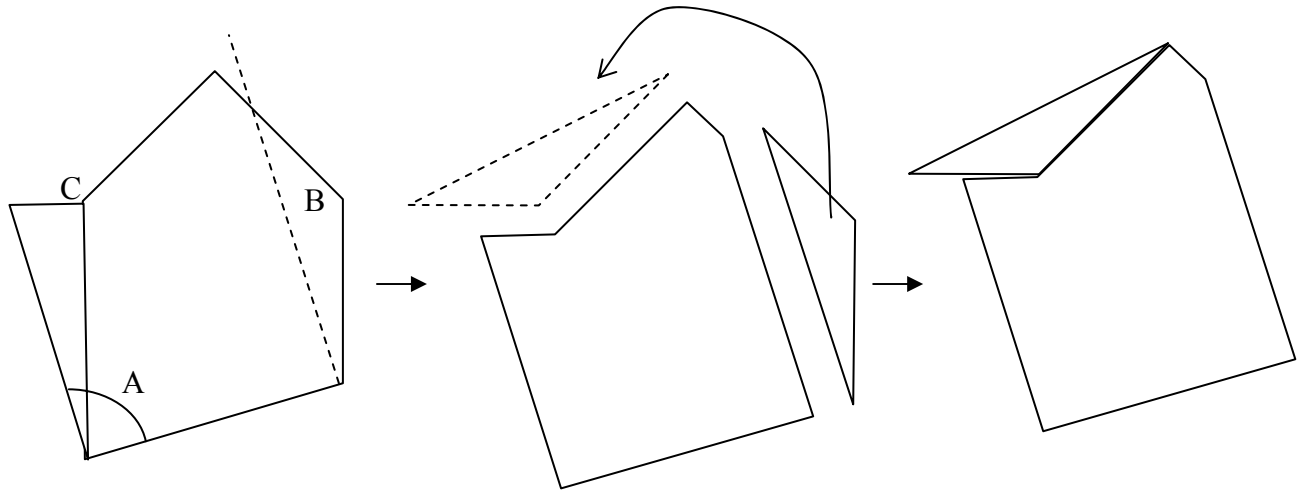
Supongamos que comenzamos realizando cortes rectos desde uno de los vértices inferiores de la figura:



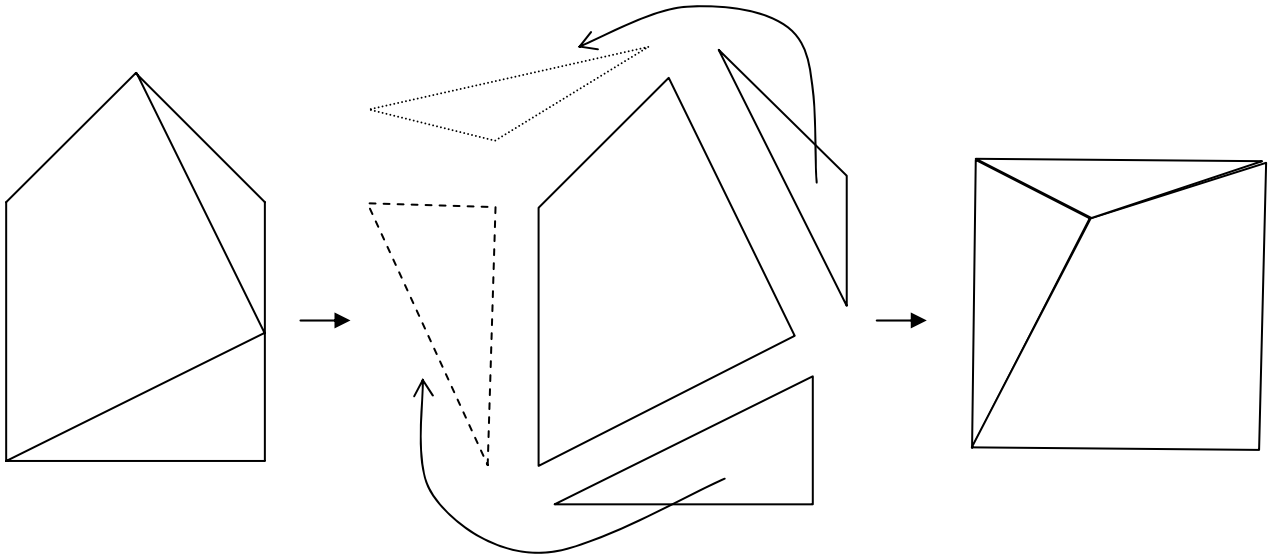
Recolocar esta pieza supone la necesidad de un lado en la pieza original igual a alguno de los de la pieza recortada, por ejemplo así:

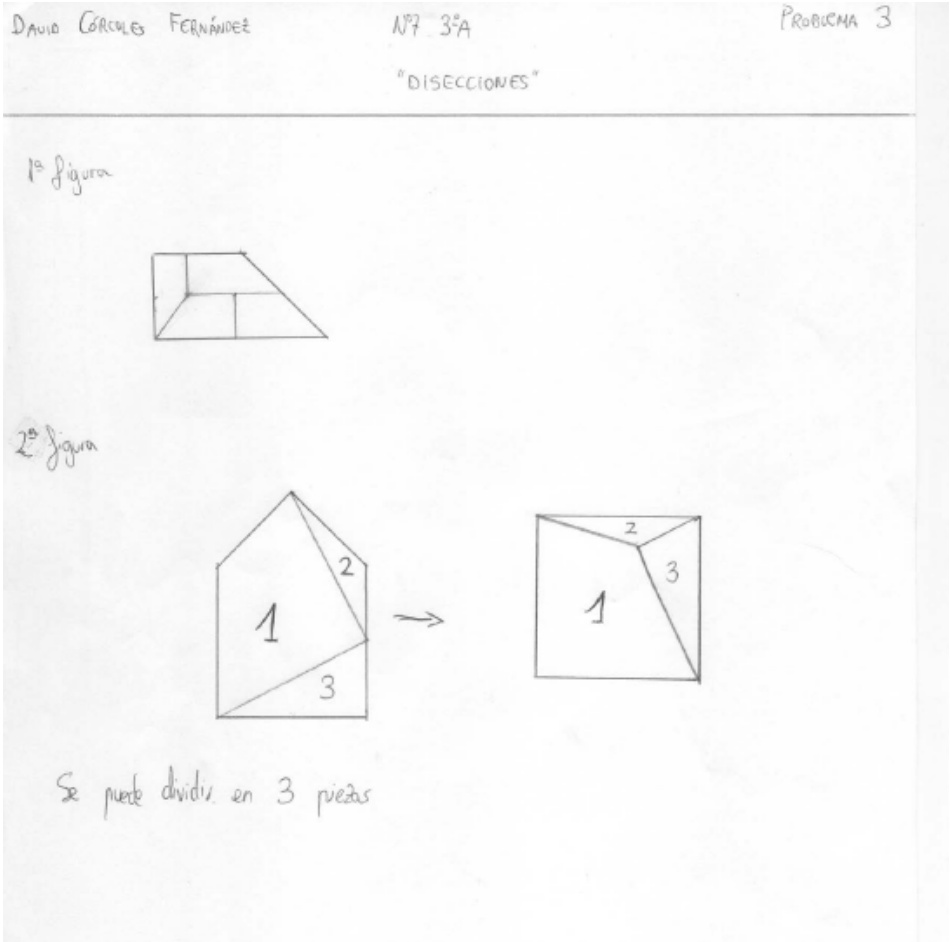


Llegado este punto nos encontramos con que el ángulo A es recto y que los ángulos B y C coinciden, al ser ambos iguales a 135º. Por lo que, trazando una línea paralela al nuevo lado, desde el vértice contrario, teniendo como objetivo dejar en la nueva pieza un ángulo de 90º, podemos observar que la pieza que resultaría de realizar un nuevo corte casi nos lleva al resultado deseado:



Visto el resultado de esta prueba, debemos seguir esta idea. No es difícil ahora observar que, si el corte inicial lo hacemos desde un vértice inferior hasta la mitad del lado contrario, la línea paralela que trazamos en el desarrollo anterior, ahora corta a la figura en el vértice superior, obteniendo entonces la solución al problema:




DAVID CÓRCOLES FERNÁNDEZ
Nº7 3ºA
PROBLEMA 3
"DISECCIONES"
1ª figura
2ª figura
1
2
3
1
2
3
Se puede dividir en 3 piezas

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – 1,2,3 RESPONDA OTRA VEZ**

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que elegimos la 1ª puerta (la que aparece sombreada en gris); las posibles ubicaciones del coche (**X**) y de las cabras (**—**) son las siguientes:

X	—	—

—	**X**	—

—	—	**X**

Tras nuestra elección, el presentador abre y elimina una de las puertas blancas sin premio, con lo cual el esquema anterior se queda reducido a éste:

X	—

—	**X**

—	**X**

La probabilidad de ganar el coche manteniendo la elección inicial (es decir, la que aparece sombreada en gris) es, obviamente 1/3. Sin embargo, **si cambiamos de puerta (pasando del gris al blanco), la probabilidad de ganar el coche es 2/3**.

PROBLEMA Nº 4 1,2,3... RESPONDA OTRA VEZ

Puede tener tres casos:

1º) CABRA — Tendría que cambiar de puerta → ~~CABRA~~ COCHE

2º) ~~CABRA~~ — CABRA — Tendría que cambiar de puerta → COCHE

3º) CABRA — ~~CABRA~~ — COCHE

Al cambiar se equivocaría

1º) Elige la puerta de una cabra, el presentador le abre la puerta de la otra cabra y el concursante al cambiar de puerta ganaría el coche.

2º) El concursante elige la puerta que tiene la otra cabra, el presentador abre la de la otra cabra y el concursante tendría que cambiar de puerta para ganar el coche.

3º) El concursante elige el coche, el presentador abre la puerta de una cabra y el concursante al cambiar de puerta, se equivoca porque se llevaría la cabra.

El concursante tiene que cambiar de puerta, porque de los tres casos que se pueden plantear, en dos de ellos ganaría el coche y en el otro no, por eso al cambiar de puerta tiene más posibilidades de llevarselo.

CRUZ Mª ILLÁN PÉREZ 3ºESO F

XIX OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – EL TELEFONO DE MI COLEGA**

Como las 4 últimas cifras forman 3 cuadrados perfectos, éstas deben ser 1649, esto es: 16, 64 y 49.

(Otras posibilidades se obtienen permutando 16, 81, 36, 64..., pero su producto debe ser un cubo perfecto).

Con lo que las tres primeras resultan: 6x4x9=216.

El número es: 2161649

Primero, buscamos todos los cuadrados perfectos de dos cifras (puesto que no pueden ser de una porque entonces las primeras cifras serían 000)

$4^2 = 16$ $7^2 = 49$
$5^2 = 25$ $8^2 = 64$
$6^2 = 36$ $9^2 = 81$

Después, buscamos un número para ocupar las cifras en las posiciones 4 y 5, que tiene que ser un cuadrado perfecto cuya 2ª cifra se repita en la 1ª cifra de otro cuadrado perfecto. Pueden ser:

- 16 • 64
- 36 • 81

A continuación, buscamos los números que pueden ocupar la posición 5 y 6. Pueden ser:

- 16 • 64
- 49

El número que ocupa la posición 6 y 7 debe de ser otro cuadrado perfecto cuya 1ª cifra sea la misma que la segunda de 16, 49 ó 64:

- 64 • 49

Por último, como las 3 primeras cifras del nº de teléfono se hallan multiplicando las 4 cifras posteriores, lo hacemos.

- $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 9 = 648$ • $8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 4 = 192$
- $1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 9 = 216$

Además, como sabemos que son un cubo perfecto, hacemos sus raíces cúbicas y el único que da exacto es:

$\sqrt[3]{216} = 6$

Por lo tanto, el nº de teléfono es:

2161649

Alejandro Atienza Martínez 3º ESO

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – EL CAMPAMENTO DE LOS LÍOS**

El primer campista tarda 1+2=3 minutos. El segundo 1+2+2=5 puesto que tiene que secar también el primer plato mojado, el tercero 1+2+2+2=7 y así sucesivamente.
Estamos por tanto ante una progresión aritmética donde $\mathbf{a_1=3}$ y **d=2**. de término general $a_n = 2n+1$

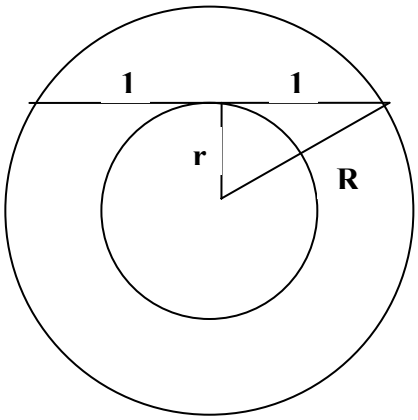
Si queremos saber el tiempo total que tardan todos aplicamos la fórmula de la suma y obtenemos $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n \rightarrow S_{50} = \frac{3+101}{2}.50 = 2600 \text{ min}$.

Hay que lavar **n** platos y secar $S = \frac{n+1}{2}.n$ es una progresión aritmética

también Por tanto $Tiempo = n.1 + n.\frac{n+1}{2}.2 = n.(n+2)$

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – CORONA**

Si trazo el radio de la circunferencia mayor **R** de manera que forme un triángulo rectángulo con la cuerda y el radio de la circunferencia menor **r,** obtengo la relación $\mathbf{R^2=r^2+1 \rightarrow R^2-r^2=1.}$
Como la superficie de una corona circular es $\mathbf{S=\pi\ (R^2-r^2)= \pi\ m^2}$



- **Solución - Fase 2 - (14/16) – LA TIRA DE NUEVES**

Denominando,

N = 999 … 9

n = número de cifras de N

C = número de cifras de $(999 \ldots 9)^2 - 1$:

Si n = (1); $9^2 - 1 = (9-1)(9+1) = 8 \cdot 10 = 80 \Rightarrow C = 2 \cdot (1) = 2$

Si n = (2); $99^2 - 1 = (99-1)(99+1) = 98 \cdot 100 = 9800 \Rightarrow C = 2 \cdot (2) = 4$

Si n = (3); $999^2 - 1 = (999-1)(999+1) = 998 \cdot 1000 = 998000 \Rightarrow C = 2 \cdot (3) = 6$

Si n = (4); $9999^2 - 1 = (9999-1)(9999+1) = 9998 \cdot 1000 = 99980000 \Rightarrow C = 2 \cdot (4) = 8$

… … …

Si n = (500); $\underbrace{999\ldots9^2 - 1}_{500\text{ cifras}} = (\underbrace{99\ldots9}_{500\text{ cifras}}-1)(\underbrace{99\ldots9}_{500\text{ cifras}}+1) = \underbrace{99\ldots98}_{500\text{ cifras}}\cdot 1000 = 998000 \Rightarrow C = 2 \cdot (500) = 1000$

Luego, el número $999\ldots9^2 - 1$ tiene 1000 cifras.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – ¿CARA O CRUZ?**

Como la moneda está trucada la probabilidad de cara (p) y cruz (q) es distinta y por tanto no podemos jugárnoslo a una tirada.

Si tiramos dos veces puede ocurrir:

Dos caras (CC): $p.p = p^2$

Cara y cruz(C+): p.q

Cruz y cara (+C): q.p

Dos cruces (++): $q.q = q^2$

Observamos que la probabilidad de C+ y +C es la misma (pq) por lo que al lanzar la moneda dos veces un jugador elije C+ y el otro +C y así nos aseguramos un sorteo totalmente al zar

Si salen dos caras o dos cruces se desecha el resultado y se vuelve a lanzar.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – IMPARES**

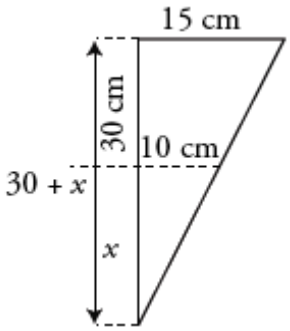
Teniendo en cuenta que un número impar lo podemos expresar como 2n-1, donde n es un número entero.

$$\begin{array}{llll} \text{si} & n = 1 & \Rightarrow & 2(1) - 1 = 1 \quad \text{y} \quad 1 = 1^2 - 0^2 \\ \text{si} & n = 2 & \Rightarrow & 2(2) - 1 = 3 \quad \text{y} \quad 3 = 2^2 - 1^2 \\ \text{si} & n = 3 & \Rightarrow & 2(3) - 1 = 5 \quad \text{y} \quad 5 = 3^2 - 2^2 \\ \text{si} & n = 4 & \Rightarrow & 2(4) - 1 = 7 \quad \text{y} \quad 7 = 4^2 - 3^2 \\ \vdots & & & \\ \text{si} & n = k & \Rightarrow & 2k - 1 = k^2 - (k-1)^2 \end{array}$$

$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2-2k+1) = k^2 - k^2+2k-1 = 2k-1$

Luego todo número impar puede escribirse como la diferencia de dos números cuadrados.

- **Solución - Fase Final - (14/16) –A POR AGUA A LA FUENTE**



Semejanza de triángulos:

$$\frac{30 + x}{15} = \frac{x}{10} \rightarrow 300 + 10x = 15x \rightarrow 5x = 300 \rightarrow x = 60 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cono grande}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 90 = 21\,195 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono pequeño}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 60 = 6\,280 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cubo}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} = 21\,195 - 6\,280 = 14\,915 \text{ cm}^3 = 14{,}915\ l$$

$$V_{\text{pelota}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = 4\,186{,}66 \text{ cm}^3 = 4{,}18666\ l$$

Se derraman 4,186 litros de agua y quedan en el cubo 10,729 litros.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – AL TEATRO**

Veamos en primer lugar el caso en el que el patio de butacas no esté dividido por ningún pasillo.

La probabilidad de que Pedro se siente, el día en el que va a ver la representación, en uno de los 26 asientos que no están en los extremos de una fila es $\frac{26}{28}$. En este caso, considerando que la obra se representa durante 20 días y que hay 30 filas en el teatro, la probabilidad de que María vaya al teatro el mismo día y se siente en la misma fila que Pedro es de $\frac{1}{20 \cdot 30} = \frac{1}{600}$. Si esto ocurriera, la probabilidad de que María se siente al lado de Pedro es de $\frac{2}{27}$. Por todo ello, la probabilidad de que, sentándose Pedro en un asiento que no está en un extremo, María vaya la teatro el mismo día y se siente a su lado es $\frac{26}{28} \cdot \frac{1}{600} \cdot \frac{2}{27} = \frac{52}{453600} = 0'0001146$

La probabilidad de que el día que Pedro va al teatro se siente en uno de los asientos que están en los extremos de una fila es $\frac{2}{28}$. En este caso, la probabilidad de que María vaya el mismo día al teatro y se siente en la misma fila, ocupando el único asiento que hay al lado de Pedro es:. $\frac{2}{28} \cdot \frac{1}{600} \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{453600} = 0'00000441$

Teniendo en consideración ambas situaciones, la probabilidad de que coincidan María y Pedro, el mismo día en el teatro y se sienten uno al lado del otro es

0’0001146+0’00000441=0’00019

FOTOS MATEMÁTICAS

Perspectiva cónica

Serie de números impares

$Brazo^2 = cabeza^2 + palo^2$

Circulo concéntrico a la elipse

Geometría patatera

XIX OLIMPIADA

Vivo en la sucesión.

Cuadrando los años

Círculo inscrito en cruz

Progresión Hexagonal

¡¡La semejanza de triángulos es muy divertida!!