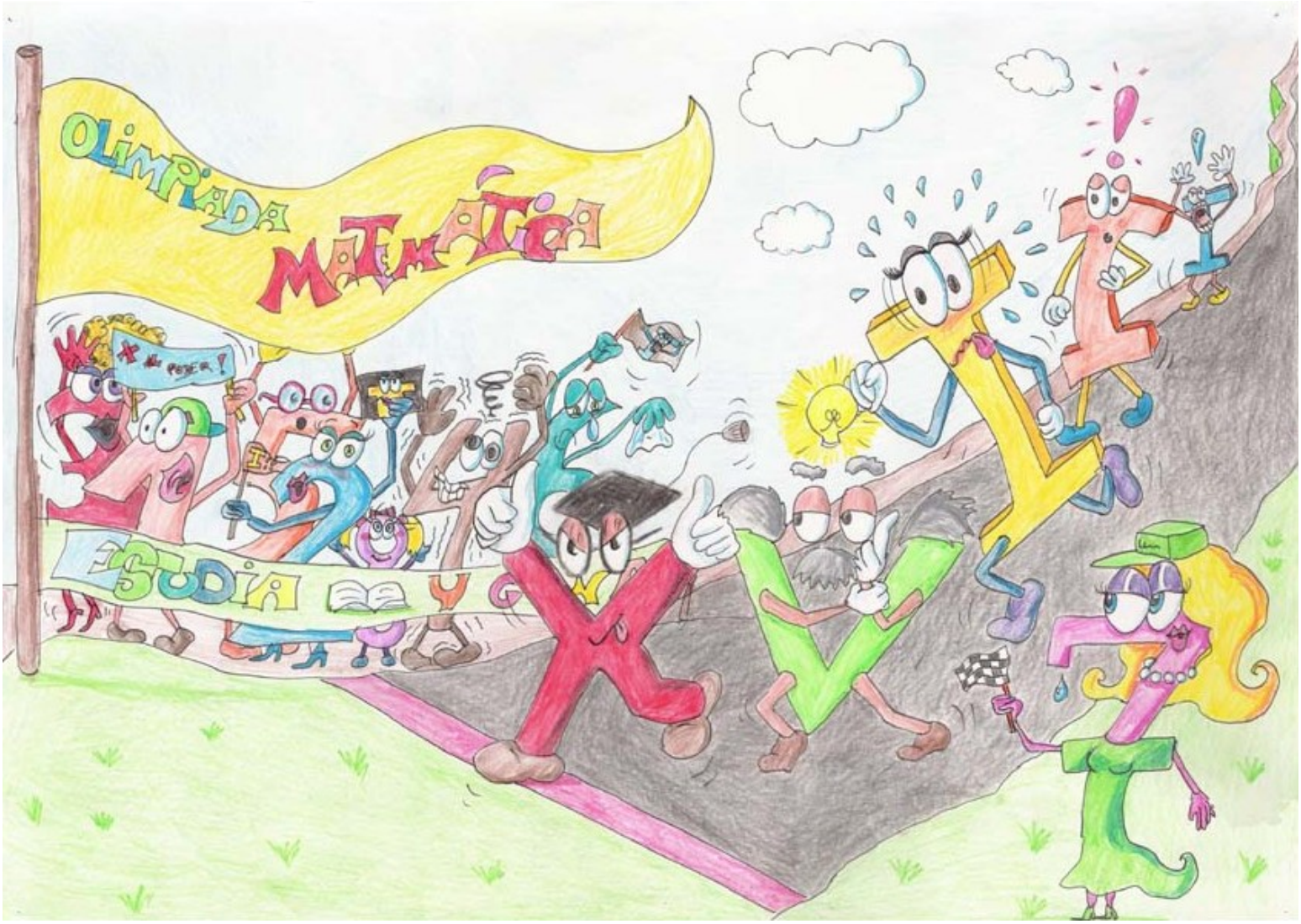
XVIII OLIMPIADA MATEMATICA



DIBUJO DE AURORA GONZÁLEZ ARTIGAO

Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
S.C.M.P.M.

Depósito legal Albacete

LA COMISIÓN ORGANIZADORA:

Antonio Bueno Aroca
Bernardino Del Campo López
Jesús Carcelén Gandía
Jesús García Segovia
Joaquín Jiménez Ramos
Juan Martínez-Tébar Giménez
Juan Emilio García Jiménez
Juan José Fernández Romera
Juan Pablo Martínez Corchano
Martín Fernández Carrión
Paloma Castedo Garví
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta
Vicente Pascual Fidalgo

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete.

También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI.

Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes “resolutores”, el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

.

En esta edición los finalistas han sido:

CICLO 12-14	CICLO 14-16
ATIENZAR MARTÍNEZ , ALEJANDRO	ALARCÓN ORTEGA, EMILIO JOSÉ
BLÁZQUEZ MOLINA, FRANCISCO	ARENAS ESCRIBANO, CARLOS
CALATAYUD MARTÍ, DIEGO	BEA SERRANO CARLOS
CÓRCOLES FERNÁNDEZ, DAVID	FERNÁNDEZ ESCOBAR, CARLOS
FERNÁNDEZ GÓMEZ, JUAN MANUEL	GONZÁLEZ CUARTERO, JESÚS
FERNÁNDEZ MORENO, JAIME	LÓPEZ SANGREGORIO, MIGUEL
GARCÍA GARCÍA, SILVIA	MIRA NAVARRO, MARÍA
MARSET FERNÁNDEZ, ANA	RODRÍGUEZ MARTÍNEZ, CRISTINA
MOYA MARTÍNEZ, CRISTINA	RODRÍGUEZ RUIZ, ALEJANDRO
TENDERO CAÑADAS, ANA	SÁNCHEZ RÓDENAS, ANA
	VARGAS NÚÑEZ, ANA

Profesores y alumnos finalistas en Ossa de Montiel

Este año hemos convocado un concurso de carteles para celebrar nuestra mayoría de edad resultando ganadora Aurora González Artigao de 3º de ESO

Además de la Olimpiada la SCMPM en colaboración con la Diputación de Albacete, la CCM y otras entidades han desarrollado a lo largo de este curso otras actividades

Como viene siendo habitual, las Matemáticas y los problemas han vuelto a salir a la calle, donde por medio del juego se han acercado a todos los públicos para enseñar y divertir.

Por esta actividad organizada por los profesores de la SCMPM y financiada por la CCM, pasaron más de 2000 alumnos de toda la provincia y un número indeterminado de público en general.

Este año la Olimpiada continua con el intercambio de quienes ya son nuestros “Amici italiani”. Esta edición participan alumnos, que han realizado alguna de nuestras fases, de los IES “Virrey Morcillo” y “Octavio Cuartero” de Villarrobledo con alumnos de Reggio Emilia (Italia), pertenecientes al Liceo “Aldo Moro” y la Escuela media “Einstein”.

Durante dos semanas los alumnos conocerán otro país, otra cultura y que las Matemáticas son las mismas en todo el mundo. Los alumnos y los profesores de los dos países compartirán su gusto por las Matemáticas y disfrutarán con todo tipo de actividades.

XVIII Olimpiada Provincial de Albacete

Nivel 12/14

Primera Fase

Problema 1. EN CASO DE DUDA CONSULTE CON SU FARMACÉUTICO
Problema 2. CUADRANDO EL CÍRCULO
Problema 3. MONTONES
Problema 4. POSAVASOS Y SERVILLETAS
Problema 5. GRAFOS
Problema 6 ¡¡A FORMAR!!

Segunda Fase

Problema 1. EL AÑO QUE NACÍ YO
Problema 2. SECANTES
Problema 3. LAS FALSAS MONEDAS

Fase Final

Problema 1. EN LA FIESTA DE BLAS
Problema 2 TRIÁNGULOS
Problema 3.BOLAS VIAJERAS

Nivel 14/16

Primera Fase

Problema 1. FLOR MATEMÁTICA
Problema 2. SOLITARIO
Problema 3. MENTIROS
Problema 4. PIRATAS DEL CARIBE (EL COFRE DEL HOMBRE MUERTO)
Problema 5. VIAJEROS AL TREN
Problema 6. EL CAPITÁN ALATRISTE

Segunda Fase

Problema 1. TRES
Problema 2. BALDOSAS
Problema 3. QUIÉN PARTE Y REPARTE…

Fase Final

Problema 1. ¿QUIERES SER MILLONARIO?
Problema 2. EL RELOJ QUE ATRASA
Problema 3. LOS TRES CUADRADOS

Soluciones

$$e^{i\pi}+1=0$$

XVIII Olimpiada

Ossa de Montiel 2007

Nivel 12/14

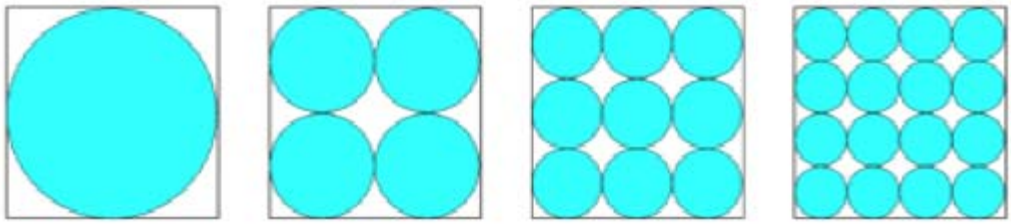
Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. EN CASO DE DUDA CONSULTE CON SU FARMACÉUTICO

Un enfermo tiene 2 frascos de pastillas y necesita tomar una pastilla de cada frasco. Dispone de 2 pastillas en cada frasco y por un accidente resulta que se caen las 4 al suelo y al recogerlas se da cuenta de que son exactamente iguales y no hay forma de distinguir las que eran de uno u otro frasco. Si toma más de una pastilla de un frasco, se muere. ¿Cómo se las apaña nuestro amigo para tomar su medicación correcta, es decir, una de cada frasco?

F.1 (12/14) Problema 2. CUADRANDO EL CÍRCULO

En la figura inferior aparece un cuadrado de lado unidad en el que se inscriben primero un círculo, luego 4, 9 y, finalmente, 16. Calcular, en cada caso, la relación entre el área del cuadrado y la suma de todas las áreas de los círculos inscritos.



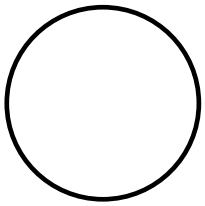
¿Cuál sería esa relación para el caso de 10x10 círculos inscritos? ¿Por qué?

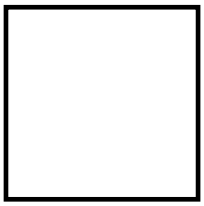
F.1 (12/14) Problema 3. MONTONES

Con las 45 monedas de euro que tengo hago 4 montones de forma que si al primero le añado dos monedas, al segundo se las quito, duplico el tercero y dejo la mitad del cuarto ahora todos los montones tiene las mismas monedas. ¿Cuantas monedas había en cada montón?

F.1 (12/14) Problema 4. POSAVASOS Y SEVILLETAS

Tenemos un posavasos circular y una servilleta cuadrada, halla el centro del posavasos utilizando únicamente la servilleta y un lápiz.



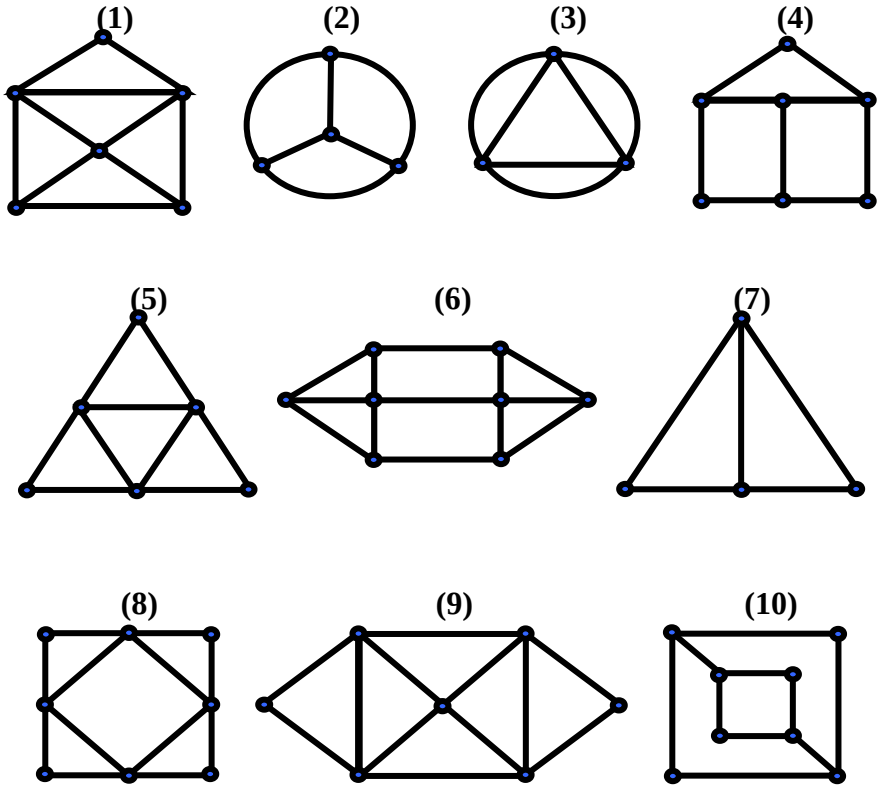


F.1 (12/14) Problema 5. GRAFOS

a) Indica cuáles de estas figuras se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces sobre el mismo tramo.

*b) De las figuras que cumplen el apartado **a**, ¿cuáles se pueden dibujar empezando y terminando en un mismo vértice?*

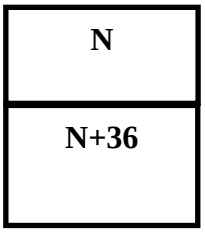
*c)Averigua qué características debe poseer una figura para poder ser dibujada en las condiciones del apartado **a** o en las condiciones del apartado **b**.*



F.1 (12/14) Problema 6. ¡¡A FORMAR!!

Un grupo de soldados están formados en forma de cuadrado. Como tenían que llevar a cabo dos operaciones diferentes, el General los dividió en dos grupos con forma de rectángulo, uno de los cuales tenía 36 soldados más que el otro.

¿Cuántos soldados hay en total?



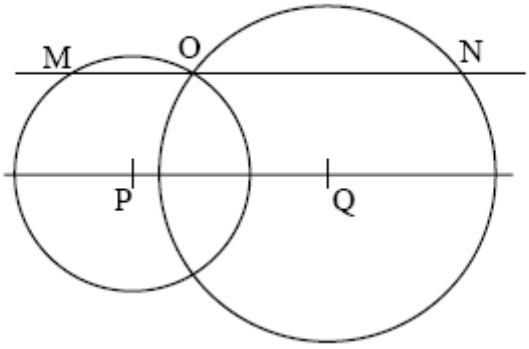
Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. ELAÑO QUE NACÍ YO

Al restar a tu año de nacimiento la suma de las cuatro cifras que lo componen, obtendrás un múltiplo de 9, ¿porqué?

F.2 (12/14) Problema 2. SECANTES

Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q respectivamente. El segmento PQ mide 5 cm. Por uno de los puntos de corte de ambas circunferencias, llamémosle O, trazamos una recta paralela a PQ, sean M y N los puntos de corte, distintos de O, de esta recta con las circunferencias, ¿Cuánto mide el segmento MN?



F.2 (12/14) Problema 3. LAS FALSAS MONEDAS

Diez bolsas están llenas de monedas y todas pesan lo mismo excepto las de una bolsa que pesan 19 gramos en lugar de 20 gr. que pesan las verdaderas. ¿Cómo se podría averiguar, con una sola pesada, cuál es el la bolsa de monedas falsas?

Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. EN LA FIESTA DE BLAS

En una fiesta han sobrado 30 botellas de refresco: 10 de ellas estaban llenas, 10 semillenas y 10 vacías. ¿Cómo se las deben repartir tres amigos para que se lleven la misma cantidad de botellas y refresco? ¿Es única la solución?

F.F (12/14) Problema 2. TRIÁNGULOS

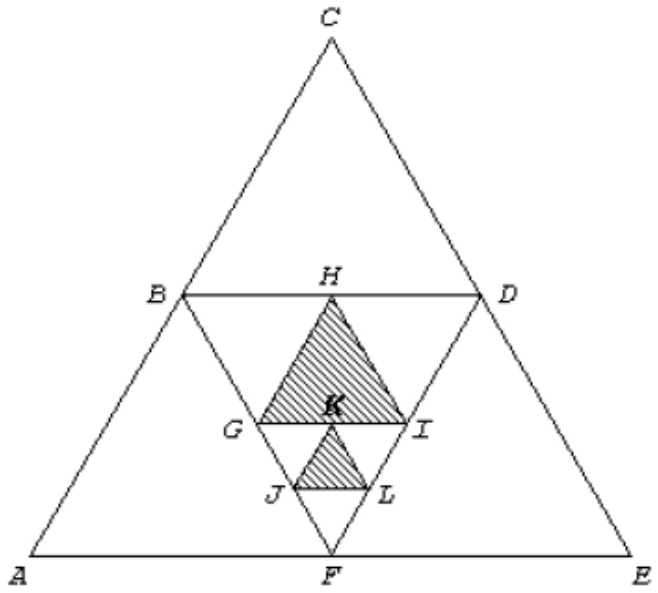
ACE es un triángulo equilátero de lado 1dm.

B, D y F son los puntos medios de los lados del triángulo ACE.

G, H e I son los puntos medios de los lados del triángulo BDF.

J, K y L son los puntos medios de los lados del triángulo GFI.

¿Qué fracción del cuadrilátero ABDE representa la zona rayada?



F.F (12/14) Problema 3. BOLAS VIAJERAS

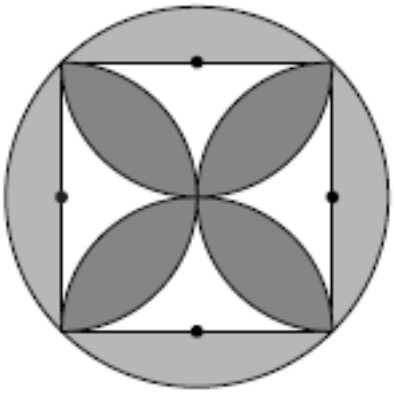
Tengo dos bolsas con 8 bolas cada una. En la bolsa ***A*** *todas son de color rojo mientras que en la* ***B*** *todas son de color blanco. Cojo tres bolas de la bolsa* ***A*** *y las paso a la bolsa* ***B****. A continuación y sin mirar su color, paso tres bolas de la bolsa* ***B*** *a la bolsa* ***A****. Después de realizar esta operación ¿qué hay más, bolas rojas en la bolsa* ***B*** *o bolas blancas en la bolsa* ***A****?*

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. FLOR MATEMÁTICA

¿Podrías decir y demostrar qué relación hay entre el área de los pétalos (gris oscuro) y de la corola (gris más claro) de esta matemática flor?



F.1 (14/16) Problema 2. SOLITARIO

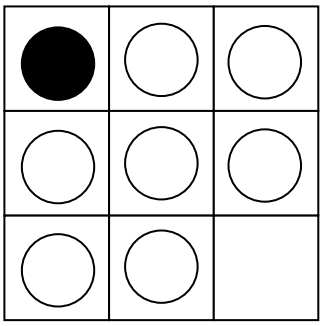
Objetivo del juego: llevar la ficha negra a la casilla vacía del vértice inferior derecho, con el mínimo número de movimientos.

Regla del juego: cada ficha se puede mover en horizontal o en vertical a una casilla contigua vacía.

a) ¿Cuál es el número mínimo de movimientos que necesitas?

b) ¿Y si el tablero fuese de 4×4?

c) ¿Y si el tablero fuese de $n\times n$?



F.1 (14/16) Problema 3. MENTIROSOS

Iñigo miente todos los lunes, martes, sábados y domingos y el resto de la semana dice la verdad. Luís miente los miércoles, jueves, viernes y sábados y el resto de la semana dice la verdad. Un día Iñigo dijo: "Luís no miente hoy". ¿Qué día de la semana era? Razónalo.

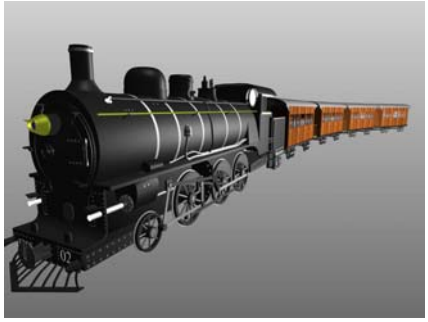
F.1 (14/16) Problema 4. PIRATAS DEl CARIBE (EL COFRE DEL HOMBRE MUERTO)

Un antiguo pergamino, en poder del capitán Sparrow, decía que en cierta isla había un tesoro enterrado, siendo estas las instrucciones:

"En la isla sólo hay dos árboles y los restos de una horca, a partir de la horca cuenta los pasos en línea recta hasta el primer árbol, gira 90 grados a la izquierda y camina al frente el mismo número de pasos, clava en ese punto una estaca. Regresa a la horca y cuenta los pasos en línea recta hasta el otro árbol, gira 90 grados a la derecha y camina al frente el mismo número de pasos, clava en ese punto otra estaca. Cava en el punto situado exactamente a medio camino entre las dos estacas."

Sparrow encontró la isla con su maravillosa brújula, pero en la isla no quedaba ni rastro de la horca de la que hablaba el pergamino. Aún así, Jack pudo determinar el lugar exacto en el que estaba enterrado el tesoro, ¿cómo lo hizo?

F.1 (14/16) Problema 5. VIAJEROS AL TERN



Un viajero llega todas las tardes a su estación suburbana exactamente a las 5. Su esposa siempre va a esperarlo y lo lleva a su casa en automóvil.

Un día él toma un tren anterior y llega a la estación a las cuatro. El clima es agradable, de manera que en lugar de llamar por teléfono a su casa, comienza a caminar a lo largo de la ruta que siempre toma su esposa. Se encuentran en algún lugar del camino. Sube al automóvil y se van hacia la casa, adonde llega diez minutos más temprano que de costumbre.

Sabiendo que la esposa siempre circula a una misma velocidad constante y que salió a tiempo para esperar el tren de las cinco, ¿puedes decir cuanto tiempo caminó el marido antes de que su mujer lo recogiera?

F.1 (14/16) Problema 6. EL CAPITAN ALATRISTE

En la taberna del Turco se enfrentan otra vez el Capitán Alatriste contra su mortal enemigo Gualterio Malatesta, pero en esta ocasión han cambiado las espadas por naipes.

Sacan dos cartas del mazo, y sin descubrirlas, Malatesta apuesta 100 ducados a que al menos de una de esas dos cartas será un rey.

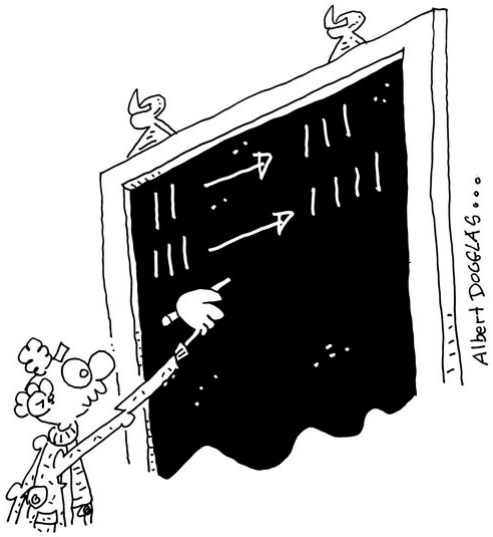
Alatriste acepta la apuesta, y por lo tanto su opción es que no haya ningún rey entre esas dos cartas.

¿Quién crees tu que tiene más posibilidades de ganar este "duelo" a espadas, oros, copas y bastos?

Segunda Fase

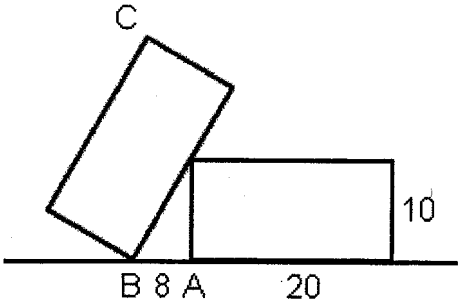
F.2 (14/16) Problema 1. TRES

Probar que dados cinco números cualesquiera, siempre es posible elegir tres de ellos cuya suma es múltiplo de tres



F.2 (14/16) Problema 2. BALDOSAS

Dos baldosas iguales, de dimensiones 10 x 20 cm. están dispuestas como aparece en el dibujo. Sabiendo que la distancia AB es de 8 cm. ¿A qué distancia del suelo se encuentra el punto C?



F.2 (14/16) Problema 3. QUIEN PARTE Y REPARTE…

Tres amigos se van de excursión el campo, recolectan una cesta de setas y deciden acampar.

Durante la noche se levantó uno de ellos y contó las setas para coger la tercera parte. Como sobraba una la echo al puchero del almuerzo y tomó la tercera parte de las que quedaron.

Al cabo de un rato despertó otro y contó las setas para coger la tercera parte. Como sobraba una la echo al puchero del almuerzo y tomó la tercera parte de las que quedaron.

Un poco mas tarde despertó el tercer amigo y contó las setas para coger la tercera parte. Como sobraba una la echo al puchero del almuerzo y tomó la tercera parte de las que quedaron.

A la mañana siguiente ninguno de los tres confesó que había cogido su tercera parte. Hicieron el reparto, cada uno se llevó su tercera parte y como sobró una la echaron al puchero y se pusieron a almorzar.

¿Cuál es el número de setas que cogieron los excursionistas?

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. ¿QUIERES SER MILLONARIO?

El concursante en el concurso televisivo es requerido para elegir una puerta entre tres (todas cerradas), y su premio consiste en llevarse lo que se encuentra detrás de la puerta elegida. Se sabe cierto que una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay sendas cabras. Una vez que el concursante ha elegido una puerta y le comunica al público y al presentador su elección, Monty (el presentador) abre una de las otras puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. En este momento se le da la opción al concursante de cambiar si lo desea de puerta (tiene dos opciones) ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

F.F (14/16) Problema 2. SIMPLIFICACIÓN DE ESCÁNDALO

En una clase de matemáticas, el profesor le encomienda a un alumno a simplificar la fracción 26666/66665. El alumno dice: "quito un 6 del numerador y un 6 del denominador y queda 2666/6665. El profesor se queda perplejo pero se da cuenta de que está bien. Entonces el alumno dice:"todavía puedo simplificar tres veces el 6 y nos queda 26666/66665 = 2666/6665 = 266/665 = 26/65 = 2/5".

El profesor felicita al alumno y le pone muy buena nota.

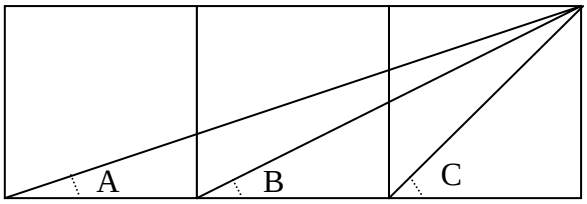
Encontrar una fracción de la misma forma que pueda simplificarse de la misma manera y que sea equivalente a 1/2. Otra equivalente a 1/4. Otra equivalente a 1/5.

Si ***a*** *y* ***b*** *son los dígitos del numerador y* ***b*** *y* ***c*** *los del denominador en las fracciones de la forma* $\dfrac{a\underbrace{b\ldots b}_{n}}{\underbrace{b\ldots b}_{n}c}$

¿Qué relación cumplen ***a****,* ***b*** *y* ***c*** *en las fracciones que pueden simplificarse de la forma indicada?*

F.F (14/16) Problema 3. LOS TRES CUADRADOS

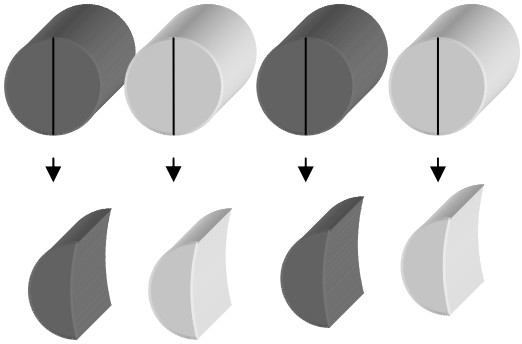
Tenemos tres cuadrados iguales dispuestos como se muestra en la figura. Usando solamente geometría elemental (no trigonometría) demostrar que el ángulo C es igual a la suma de los ángulos A y B.



Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – ENCASO DE DUDA CONSULTE CON SU FARMACÉUTICO**

El problema se resuelve fácilmente partiendo las cuatro pastillas por la mitad, tomándose un día las cuatro primeras mitades y el otro las cuatro segundas.
De esta forma te aseguras tomar una pastilla de cada.



- **Solución - Fase 1 - (12/14) – CUADRANDO EL CÍRCULO**

El circulo inscrito está en una relación de $\frac{\pi}{4}$. Está relación se mantiene en todos los casos, sea cual sea el número de círculos inscritos en el cuadrado porque aunque el radio sea ¼, 1/9, 1/16,… como luego hay que multiplicar el área de cada uno por 4, 9, 16, , 100, etc. la relación entre áreas es siempre $\frac{\pi}{4}$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – MONTONES**

Solución sin ecuaciones:
El último montón es par pues se puede dividir por la mitad.
el penúltimo se queda par después de duplicarlo por tanto al ser iguales todos los montones serán pares después de actuar sobre ellos.
Los montones primero y segundo al principio deben ser pares pues al sumar o restar dos sale par (todos lo son) . además si al sumar dos al primero sale lo mismo que al restar dos al segundo se tienen que diferenciar en 4 unidades.
El tercer montón tiene que ser necesariamente impar pues todos los demás son pares y la suma 45 es impar. Además como al duplicar este sale lo mismo que al hacer la mitad del cuarto, este último tiene que ser cuatro veces el tercero.

Probemos pues con estas condiciones:

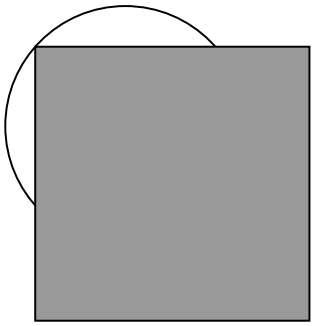
Tercero: Antes	**Tercero Después**	**Cuarto**	**faltan**	**Primero Par=: después -2**	**Segundo : primero+4**
1	2	4	40	1: no es par	5
3	6	12	30	4	8:no suma 30
5	10	20	20	8	12
7	14	28	10	12	16: no suma 10
9	18	36: se pasa			

Evidentemente con ecuaciones:
Llamado x a las monedas que tiene el tercero:

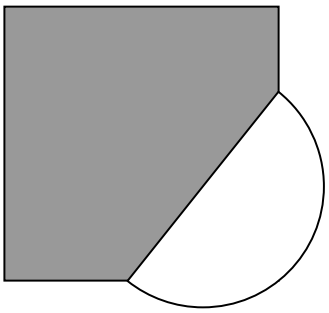
$$x + 4x + 2x - 2 + 2x + 2 = 45$$
$$9x = 45 \rightarrow x = 5$$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – POSAVASOS Y SERVILLETA**

Situamos la servilleta sobre el posavasos de esta forma:



a continuación doblamos la servilleta por los puntos de en los que su borde corta a la circunferencia que da forma al posavasos:



de este modo hemos obtenido un diámetro, que podemos dibujar sobre el posavasos. Repitiendo este proceso podemos obtener otro diámetro, y el punto de corte de ambos segmentos es el centro del posavasos.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – GRAFOS**

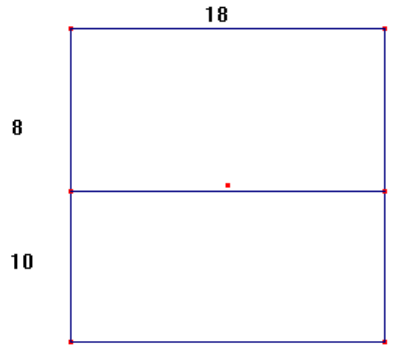
a) Las figuras 1, 3, 5, 7, 8 y 9.

b) Las figuras 3, 5, 8 y 9.

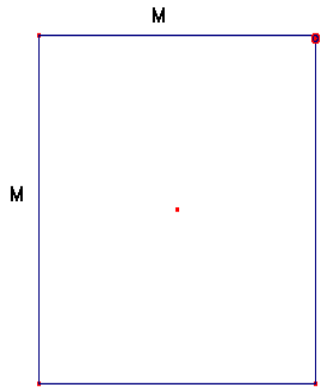
c) Una figura se puede dibujar en las condiciones del apartado b si en todos los vértices de la figura concurre un número par de segmentos. Una figura se puede dibujar en las condiciones del apartado a, pero no en las del apartado b, cuando haya dos vértices con un número impar de segmentos; esos vértices serán el inicio y el final del recorrido del lápiz. La explicación es la siguiente: cada vez que llegamos a un “vértice de paso” en nuestro camino, hemos de salir de él por un segmento distinto no recorrido antes, por lo cual los segmentos en cada “vértice de paso” han de estar por parejas (segmento de entrada y segmento de salida); sólo los vértices inicial y final del recorrido (en el caso de que sean vértices distintos) tendrán un número impar de segmentos.

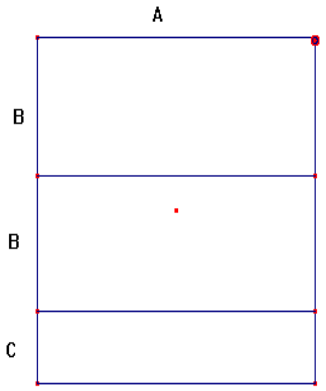
- **Solución - Fase 1 - (12/14) – ¡¡A FORMAR!!**

Supongamos que n es el número de soldados en cada fila (el mismo razonamiento si fuese en la columna) del cuadrado inicial.
Supongamos que en la nueva distribución el número de columnas no varia. Entonces el rectángulo de N+36 tendrá más filas que el de N. ese número de filas y el de columnas serán divisores de 36.
Como los divisores de 36 son 1,2,3,4,6,9,12,18,36. y como el número de soldados es superior a 36, entonces n >6 pues n^2 ha de ser mayor de 36.
Si n =9 el rectángulo mayor tendrá (36/9) = 4 filas más que el menor, pero 9 no lo podemos descomponer como suma de dos números enteros cuya diferencia sea 4.
Por el mismo razonamiento rechazamos n=12 y n=36.
Para n=18, tenemos (36/18) =2, el segundo rectángulo tiene 2 filas más que el menor.
Quedaría de la siguiente forma:



El problema se puede complicar si suponemos que el número de columnas no se mantiene





Entonces A.C = 36 y 2AB= M^2 -36 es decir 2AB = (M+6)(M-6) puedo construir una tabla en la que A ha de ser menor o igual que 36, pues AC =36. y le damos valores a B para obtener diferentes soluciones que sean válidas. Otra posibilidad es:2AB-36 = M^2 , como A ha de ser divisor de 36, p.e. A=36/n nos queda:

$M^2 = 36(\frac{2B}{n}+1)$ es decir $M = 6\sqrt{(\frac{2B}{n}+1)}$ es decir $(\frac{2B}{n}+1)$ ha de ser un cuadrado perfecto Una solución sería:

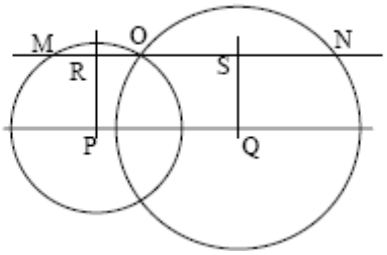
C	A	n	B	2AB	M
2	18	2	3	108	12

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – ELAÑO QUE NACÍ YO**

El año de mi nacimiento es un número de cuatro cifras (distintas o no) **abcd** que expresado de forma polinómica es **1000a+100b+10c+d.**
Si le resto **a+b+c+d** el número se queda **999a+99b+9c=9(111a+11b+c)** que como se ve será siempre múltiplo de 9

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – SECANTES**

La forma de abordar el problema es importante para su resolución, se convierte en sencillo si tenemos en cuenta la figura:



y que MR = RO y OS = SN.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – LAS FALSAS MONEDAS**

Se deben numerar las bolsas de 1 a 10
De la bolsa nº 1 se extrae 1 moneda. De la bolsa nº 2 se sacan 2 monedas; y se continúa con las demás bolsas, hasta extraer 10 monedas de la bolsa nº 10.
Posteriormente se pesan las monedas extraídas juntas, que dan un total de 55 monedas. Si por ejemplo, se obtiene un peso de 1098 gr., esto quiere decir que hay un déficit de 2 gr. con respecto al peso de 1100 gr. que se obtendría si todas las monedas pesaran 20 gr. Esto me indicaría que he extraído las monedas falsas de la bolsa nº 2 (38 gr. para las 2 monedas extraídas). El mismo razonamiento se aplicaría para cualquier otro peso entre 1090 y 1099 gr.

- **Solución - Fase Final - (12/14) – EN LA FIESTA DE BLAS**

Este problema se puede hacer por tanteo .Una solución sencilla y que se ve rápidamente es que uno de ellos se lleve las 10 botellas semillenas y los otros dos 5 llenas y cinco vacías.
Si queremos plantear ecuaciones quedaría de la siguiente manera:

	Llenas	Semillenas	Vacías
Amigo A	x	y	$10-x-y$
Amigo B	z	t	$10-z-t$
Amigo C	u	v	$10-u-v$

Con esto se puede plantear al siguiente sistema $\begin{cases} x+z+u=10 \\ y+t+v=10 \\ 2x+y=10 \\ 2z+t=10 \\ 2u+v=10 \end{cases}$

Cuyas soluciones son $\begin{cases} x=10-\lambda-\mu \\ y=2\lambda+2\mu-10 \\ z=\lambda \\ t=10-2\lambda \\ u=\mu \\ v=10-2\mu \end{cases}$

Es obvio que los valores de los parámetros λ y μ deben estar entre 0 y 5

$\lambda = 0; \mu = 5$

Para $\lambda = 5; \mu = 0$ *se obtiene la solución primera*

$\lambda = 5; \mu = 5$

	Llenas		Semillenas		Vacías	
Amigo A	*5*	***4***	*0*	***2***	*5*	***4***
Amigo B	*5*	***1***	*0*	***8***	*5*	***1***
Amigo C	*0*	***5***	*10*	***0***	*0*	***5***

- **Solución - Fase Final - (12/14) – TRIÁNGULOS**

Como se puede apreciar en la figura y por ser todos los triángulos equiláteros, el triángulo **BDF** es la tercera parte del cuadrilátero **ABDE.** El triángulo **BDF** queda también dividido en 4 triángulos equiláteros siendo **GHI** uno de ellos y representando $\frac{1}{12}$ de la figura total

El triángulo **JKL** es a su vez la cuarta parte del **FGI** representado $\frac{1}{48}$

Por lo que el resultado final es $\frac{1}{12} + \frac{1}{48} = \frac{5}{48}$

- **Solución - Fase Final - (12/14) – BOLAS VIAJERAS**

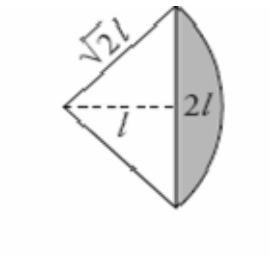
Vamos a ver todas las posibilidades

PASO DE LA B A LA A	BOLSA A	BOLSA B
3 BLANCAS	5 ROJAS 3 BLANCAS	5 BLANCAS 3 ROJAS
2 BLANCAS 1 ROJA	6 ROJAS 2 BLANCAS	6 BLANCAS 2 ROJAS
1 BLANCA 2 ROJAS	7 ROJAS 1 BLANCA	7 BLANCAS 1 ROJA
3 ROJAS	8 ROJAS	8 BLANCAS

Por lo que resulta obvio que hay siempre igual cantidad

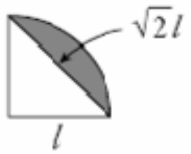
- **Solución - Fase 1 - (14/16) –FLOR MATEMÁTICA**

Sea R el radio de la circunferencia:



El área de la corola (gris claro) será: $\pi R^2 - (\sqrt{2} \cdot R)^2 = (\pi - 2) R^2$

ya que $l^2 + l^2 = d^2$, siendo l el lado del cuadrado y d el diámetro de la circunferencia (igual a la diagonal del cuadrado), entonces
$2R = d = \sqrt{2} \cdot l \rightarrow l = \sqrt{2} \cdot R$



Cada uno de los 4 pétalos se puede dividir en 2 partes ("semipétalos"), cada una de las cuales tendrá como área:

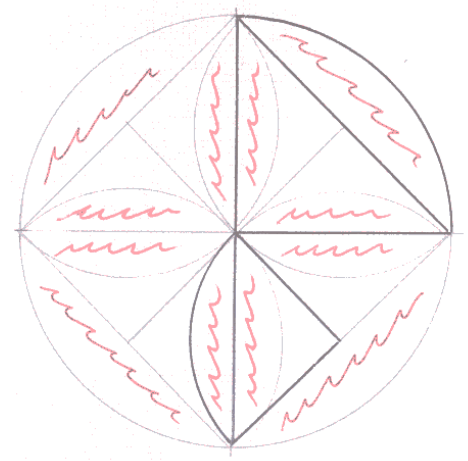
$\pi (l/2)^2/ 4 - l^2/ 8 = (1/8) (\pi /2-1) l^2$

por lo que, como son 8 "semipétalos", el área de todos los pétalos (gris oscuro) será:

$(\pi /2-1) l^2 = (\pi /2-1) \cdot (\sqrt{2} \cdot R)^2 = (\pi -2) R^2$

Es decir **ambas áreas son iguales**.

Solución de Miguel López Sangregorio



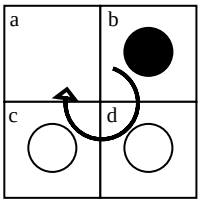
Otra forma de hacerlo es darse cuenta de que el triángulo que se ha utilizado como base para construir cada uno de los 8 sectores circulares pequeños es la mitad del triángulo que se ha utilizado para construir cada uno de los 4 sectores circulares grandes.

Entonces, si utilizamos 8 triángulos $\overset{\triangle}{a}$ ($8\overset{\triangle}{a}$) por un lado, y 4 triángulos el doble de grandes que $\overset{\triangle}{a}$, $2\overset{\triangle}{a}$, tenemos $4 \cdot 2\overset{\triangle}{a} = 8\overset{\triangle}{a}$.

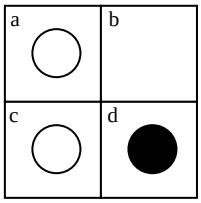
La relación es la misma que la anterior: $\frac{8\overset{\triangle}{a}}{8\overset{\triangle}{a}} = 1$. Ocupan la misma superficie las porciones circulares exteriores y "los pétalos" interiores.

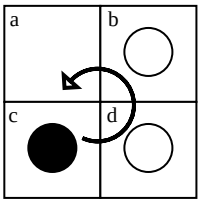
- **Solución - Fase 1 - (14/16) – SOLITARIO**

Usaremos dos desplazamientos básicos: vertical y horizontal. Ambos requieren 3 movimientos.

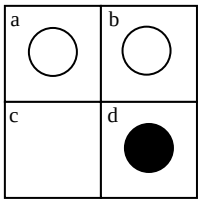


Desplazamiento vertical (V): c→a, d→c, b→d





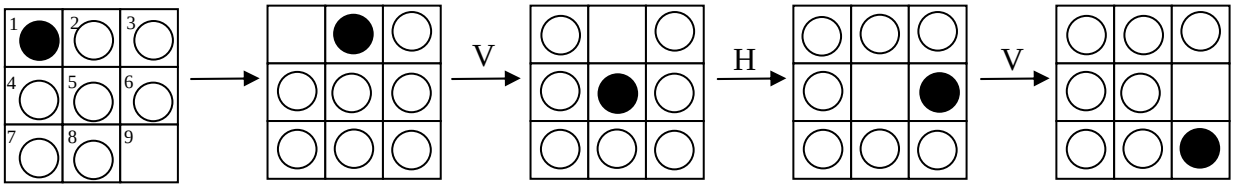
Desplazamiento horizontal (H): b→a, d→b, c→d



<u>Tablero 3 × 3.</u>

Primero movemos la ficha negra y las fichas 2, 3 y 6 aprovechando el hueco inicial; para esto necesitamos 4 movimientos: 6→9, 3→6, 2→3, 1→2.

Después vamos alternando los desplazamientos verticales (V) y los horizontales (H).

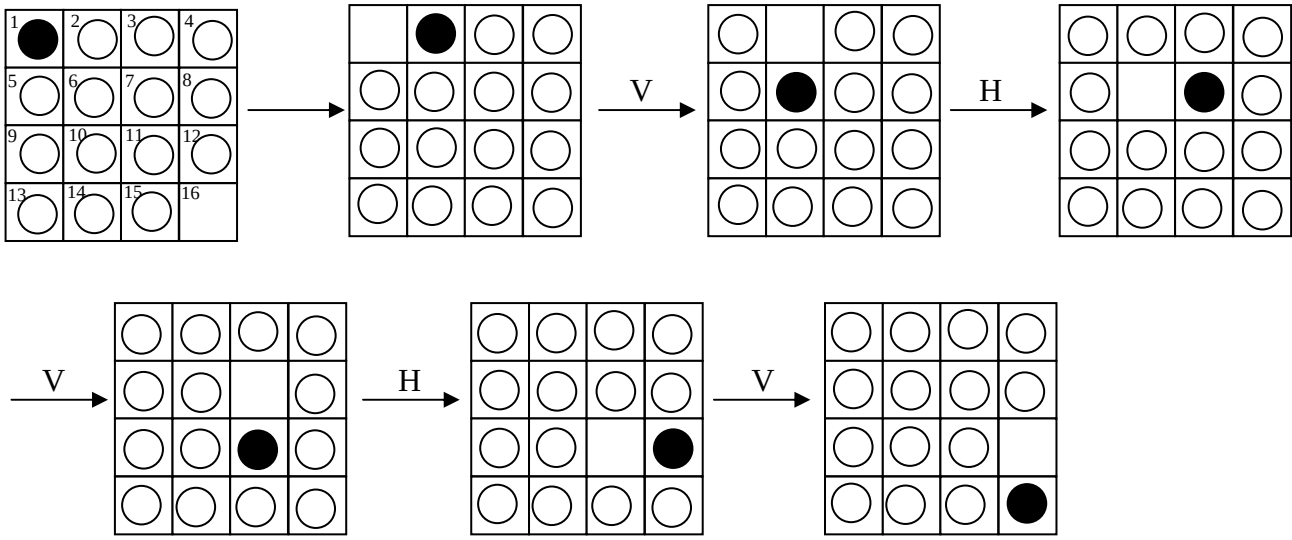


En total, el número mínimo de movimientos es: 4 + 3 + 3 + 3 = 13.

<u>Tablero 4 × 4.</u>

Primero movemos la ficha negra y las fichas 2, 3, 4, 8 y 12 aprovechando el hueco inicial; para esto necesitamos 6 movimientos: 12→16, 8→12, 4→8, 3→4, 2→3, 1→2.

Después vamos alternando los desplazamientos verticales (V) y los horizontales (H).



En total, el número mínimo de movimientos es: 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21.

<u>Tablero n × n.</u>

En el tablero **3×3**, el número inicial de movimientos es 4. En el tablero **4×4**, el número inicial de movimientos es 6, ya que hay una fila más y una columna más que en el tablero **3×3**.
Es decir, el número inicial de movimientos sigue la progresión aritmética 4, 6, 8, ..., 2n–2, ...

A continuación, en el tablero **3×3** hay 3 desplazamientos verticales u horizontales (de tres movimientos cada uno), mientras que en el tablero **4×4** hay 5 de esos desplazamientos (o sea, 2 más que en el de **3×3**), por el mismo motivo que antes.
En consecuencia, el número de desplazamientos verticales u horizontales sigue la progresión aritmética 3, 5, 7, ..., 2n–3, ...
Y, por tanto, el número de movimientos debidos a estos desplazamientos será $3\cdot(2n–3) = 6n – 9$.

Resumiendo, el número mínimo de movimientos en un tablero **n×n** será:

2n–2 + 6n–9 = **8n – 11**.

OLIMPIADA MATEMATICA

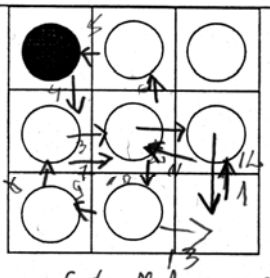
Centros de Profesores y Recursos Albacete, Almansa, Hellín y Villarrobledo

DIPUTACIÓN DE ALBACETE

XVIII OLIMPIADA. PRIMERA FASE.
NIVEL 14-16. PROBLEMA Nº 2

Visinovschi Ion 3ºC
I.E.S Virrey Morcillo
Villarrobledo

SOLITARIO



Objetivo del juego: llevar la ficha negra a la casilla vacía del vértice inferior derecho, con el mínimo número de movimientos.

Regla del juego: cada ficha se puede mover en horizontal o en vertical a una casilla contigua vacía.

a) ¿Cuál es el número mínimo de movimientos que necesitas? Cada flecha representa un movimiento.

b) ¿Y si el tablero fuese de 4×4?

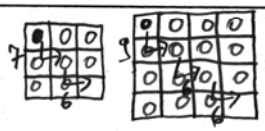
c) ¿Y si el tablero fuese de n×n?

Despues de distintas pruebas observo que el mejor camino para la ficha negra, es a través de las casillas de la diagonal.

a) Para mover la ficha negra un paso sobre la diagonal en el tablero de 3x3 necesitas 7 movimientos lo que significa el doble de fichas que caben en un lado más 1, una vez movida a ese lugar la ficha negra necesita 6 movimientos para avanzar otro paso en la diagonal por el nº de casillas que le quedan en la diagonal, en este caso 1. El nº minimo de movimientos es 13.

b) En este caso vamos a proceder igual. $(4 \cdot 2 + 1) + 6 \cdot 2 = 21$ 21 es el nº minimo de movimientos.

c). Si el tablero fuese de n x n entonces el nº minimo de movimientos es: $(n \cdot 2 + 1) + 6 \cdot (n - 2) = 2n + 1 + 6n - 12 = 8n - 11$



E puesto "n-2" por que 2 casillas en diagonal ya se han contado con el "n·2+1" y quedan el resto.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – MENTIROSOS**

El esquema que explica las posibilidades es éste:

	lunes	*martes*	*miércoles*	*jueves*	*viernes*	*sábado*	*domingo*
Iñigo	*M*	*M*	*V*	*V*	*V*	*M*	*M*
Luis	*V*	*V*	*M*	*M*	*M*	*M*	*V*

M = miente
V = dice la verdad

Ante la frase de Iñigo "Luis no miente hoy" hay dos posibilidades:

1ª) Iñigo dice la verdad.

Iñigo	*V*
Luis	*V*

tendríamos

Lo cual es imposible como se ve en la tabla de arriba

2ª) Iñigo miente.

Iñigo	*M*
Luis	*M*

Tendríamos

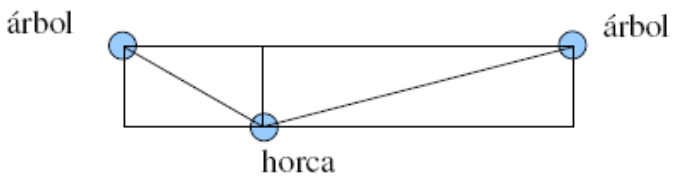
lo cual ocurre el sábado como se ve en la tabla de arriba

Por lo tanto el único día de la semana en que puede dar íñigo la afirmación "Luis miente hoy" es el ***sábado****.*

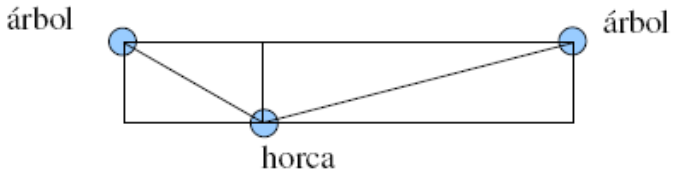
- **Solución - Fase 1 - (14/16) – PIRATAS DEL CARIBE (EL COFRE DEL HOMBRE MUERTO)**

Haciendo un dibujo, tomando como unidad la distancia entre las palmeras y como ubicación de la horca un punto cualquiera, tenemos:

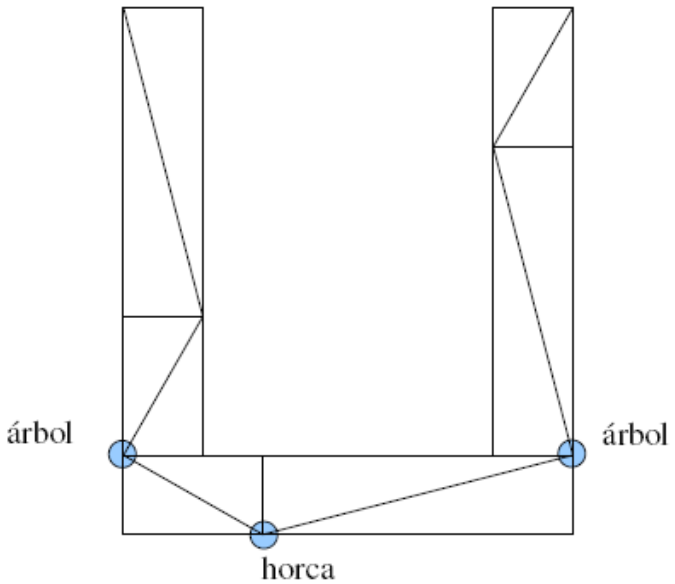
podemos incluir en el dibujo dos rectángulos, de la forma:



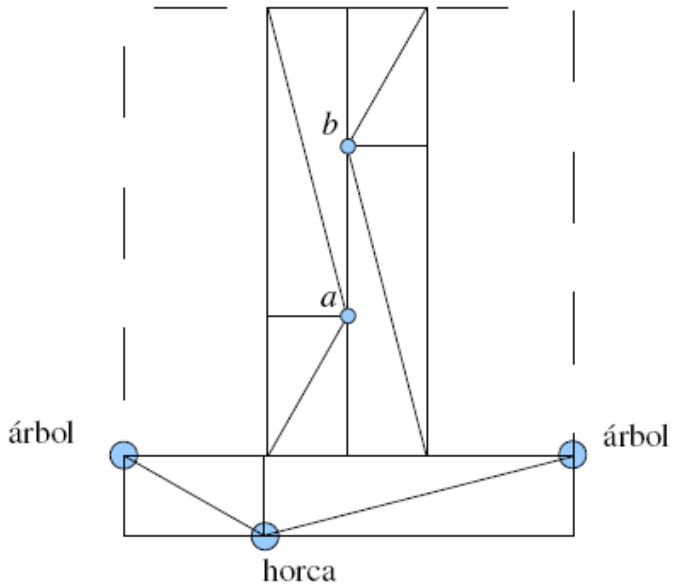
si ahora giramos la figura 90 grados sobre cada árbol obtenemos:



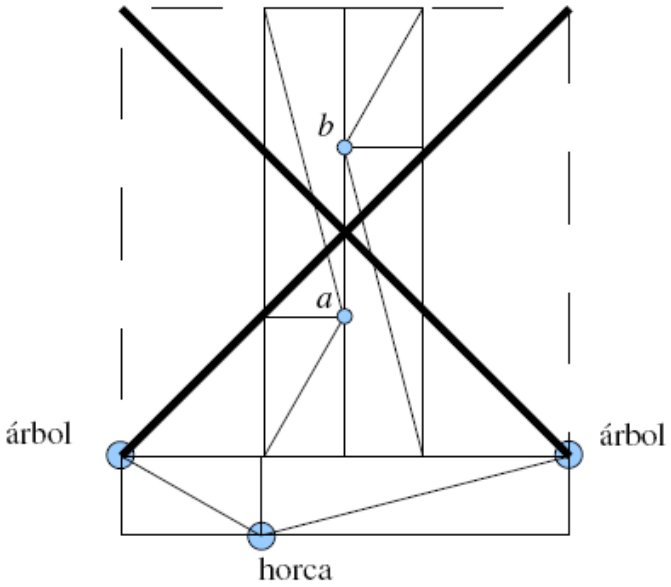
para encontrar el punto medio buscado podemos mover los rectángulos dibujados sobre cada árbol hasta el punto medio del segmento que una los árboles, de la forma:



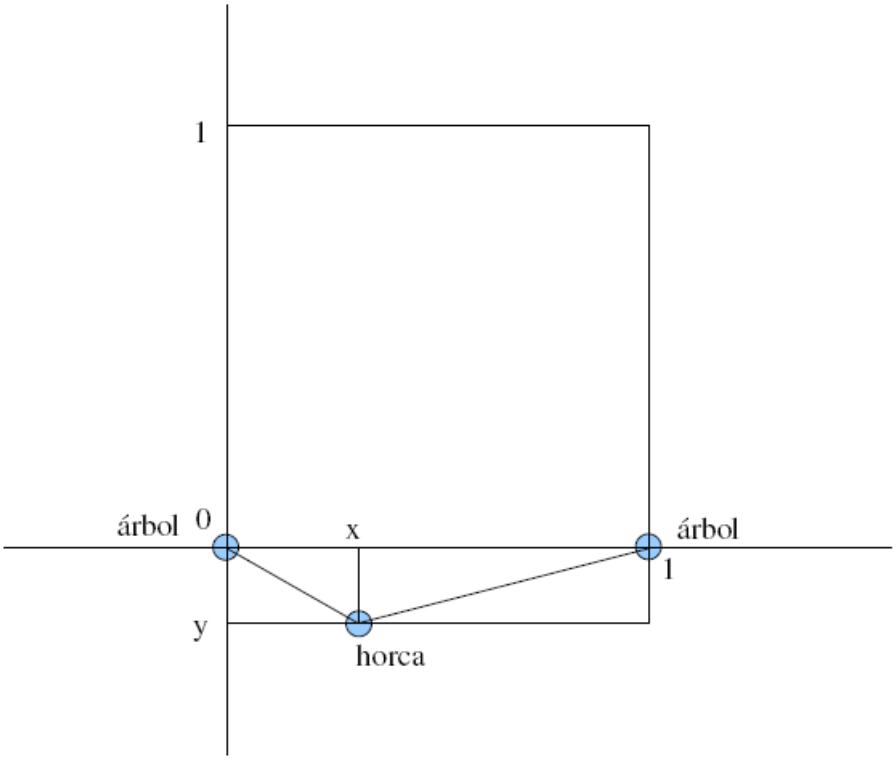
para
encontrar el punto medio buscado podemos mover los rectángulos dibujados sobre cada árbol hasta el punto medio del segmento que una los árboles, de la forma**:**



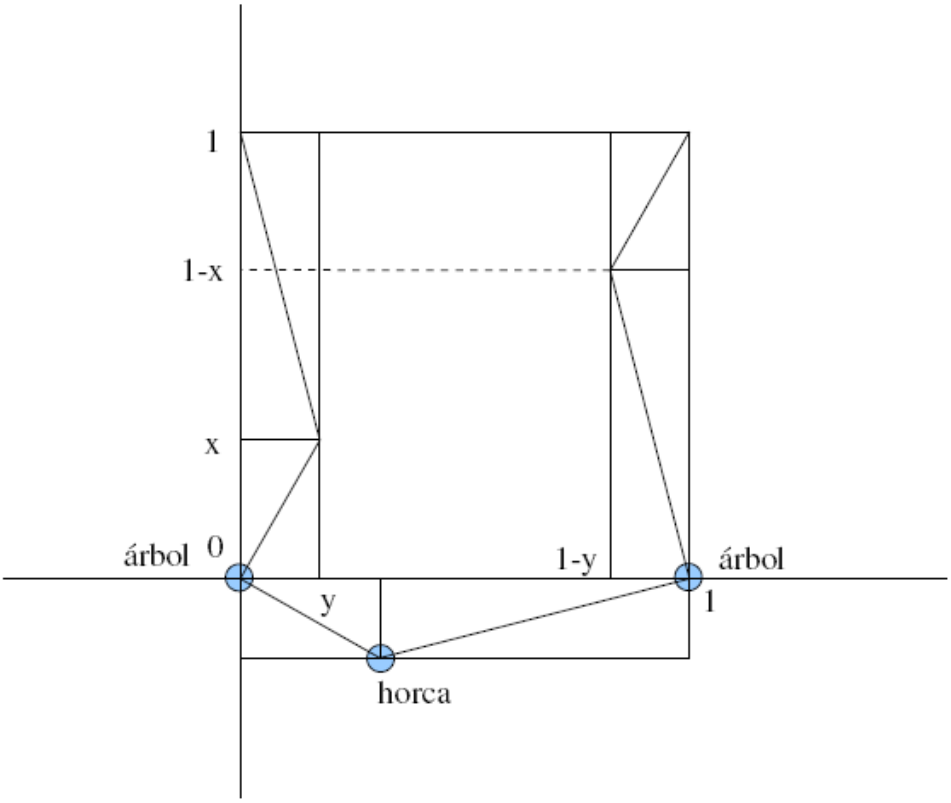
siendo el punto medio buscado el punto medio del segmento que une los puntos a y b, punto que coincide con el centro del cuadrado que tiene como lado el segmento que une los dos árboles:



En todo este proceso el punto en el que se encontrase la horca inicialmente es irrelevante, ya que las figuras que se levantan sobre cada árbol serán en cualquier caso iguales, pudiéndose obtener una a partir de la otra mediante un giro de 180º.
Utilizando coordenadas en el plano y tomando como unidad la distancia entre los árboles, podemos razonar de la forma siguiente:



realizando ahora las rotaciones citadas en el método anterior, tenemos:



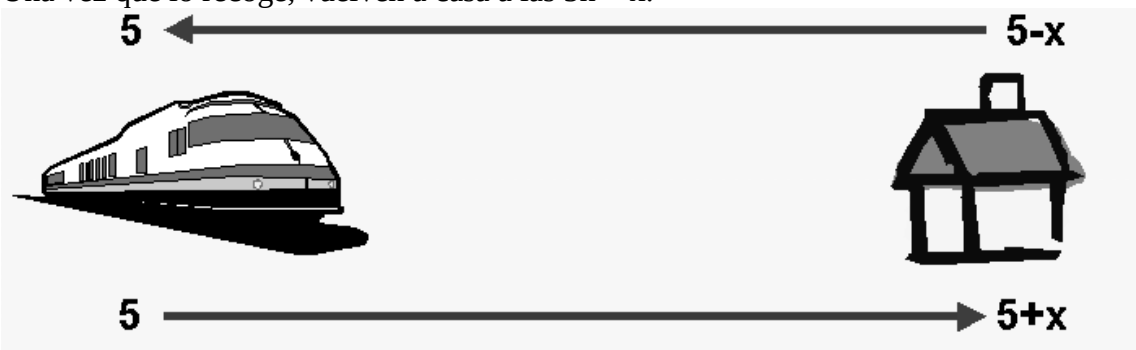
es decir, que los puntos en los que clavaremos las estacas son (y,x) y (1-y,1-x), calculamos ahora su punto medio y tendremos:

$$PuntodelTesoro = \left(\frac{y+1-y}{2}, \frac{x+1-x}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

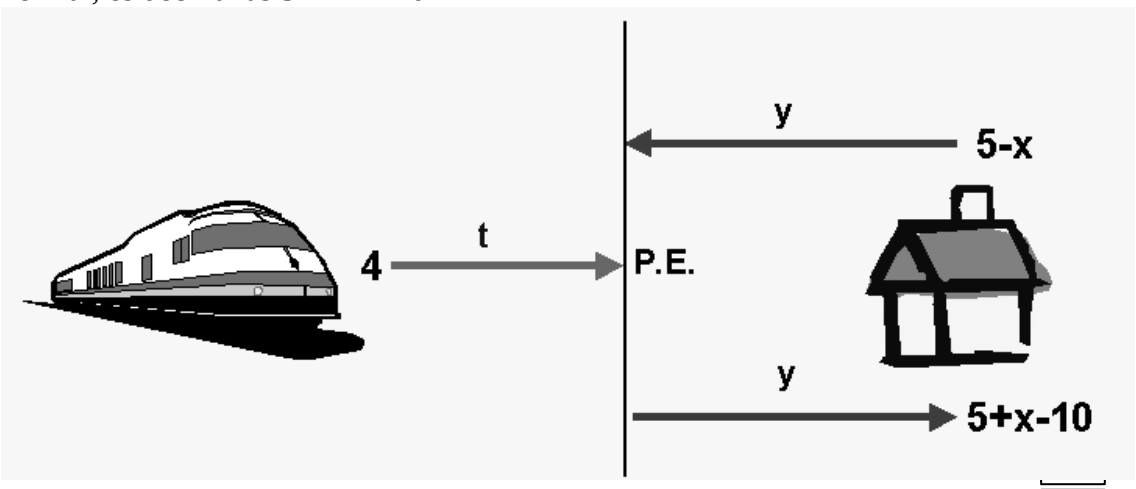
Siendo este punto el centro del cuadrado de lado la unidad (distancia entre los árboles).

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – VIAJEROS AL TREN**

Vayamos por partes: diariamente el hombre llega a la estación a las 5 en punto, en donde lo espera su mujer, que salió de casa a las 5h – x , siendo x el tiempo en minutos que emplea en recorrer el espacio entre la casa y la estación.
Una vez que lo recoge, vuelven a casa a las 5h + x.



El día en cuestión, nuestro hombre llega a la estación una hora antes, es decir a las 4, y comienza a caminar.
Su mujer sale a la hora de siempre, es decir a las 5h – x, lo recoge en el punto de encuentro (P.E.) y vuelven a casa 10 minutos antes de lo normal, es decir a las 5h + x – 10'



¿Cuánto tiempo está el hombre andando?

t = (5h – x) – 4h + y = 1h – x + y = 60’ – x + y (1)

siendo “y” los minutos que tarda la mujer en encontrar al marido.
¿Cuánto tiempo tarda la mujer desde que sale hasta la vuelta?
Para hallar ese tiempo planteamos esta igualdad:

Hora de salida + ir + volver = Hora de llegada

Por lo que: (5h – x) + y + y = 5h + x – 10’, de donde obtenemos

5’ = x – y (2)

De ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} t = 60' - x + y \quad (1) \\ 5' = x - y \quad (2) \;\; \text{->} \;\; -5' = -x + y \end{cases}$$

sustituyendo – x + y en la ecuación (1)...

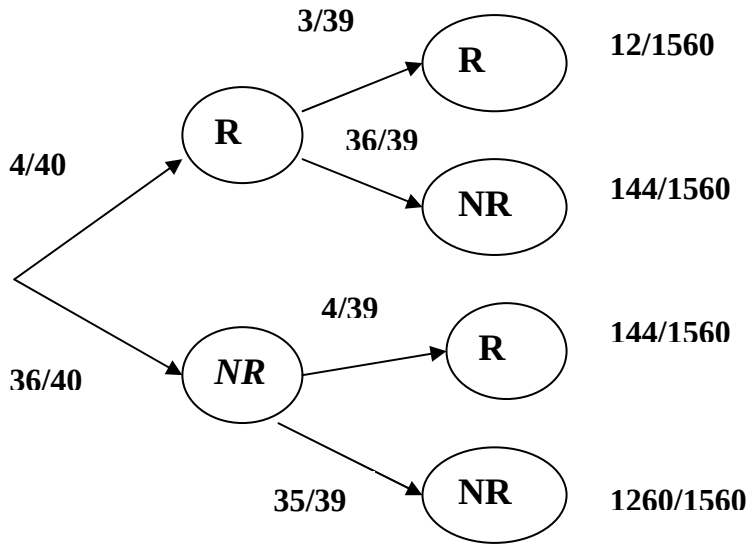
Obtenemos

t = 60’ – x + y = 60’ – 5’ = <u>55’</u>

Luego el señor caminó 55 minutos hasta que se encontró con su esposa.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – EL CAPITÁN ALATRISTE**

Como estamos en el Siglo de Ora tomamos una baraja española de 40 cartas.
De estas 4 son reyes (R) y 36 son "no reyes" (NR).
Como vemos en el diagrama de árbol hay cuatro maneras de extraer esas dos cartas del mazo, aunque no tienen las mismas probabilidades



De forma que Gualterio Malatesta tiene una probabilidad de obtener algún rey :

$P(R \cap R) + P(R \cap NR) + P(NR \cap R) = 300/1560$

Mientras que la del Capitán Alatriste es de: $P(NR \cap NR) = 1260/1560$

La probabilidad de Malatesta también su puede obtener por suceso contrario:

$P(M) = 1 - P(NR \cap NR) = 1 - 1260/1560 = 300/1560$

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – TRES**

En primer lugar, podemos clasificar a los números naturales en tres grupos: múltiplos de 3, (múltiplos de 3)+1, y (múltiplos de 3) +2. Lo que quiere decir que al dividir entre tres, lo que obtenemos de resto es 0, 1 y 2 respectivamente.

A partir a ahora trabajaremos con los restos simplemente, y denotaremos a los números como pertenecientes a la clase 0, a la clase 1 o a la clase 2.

También es importante recordar la aritmética particular que existe con las clases de resto. Por ejemplo, si sumamos dos clases 2, obtenemos una clase 4, que es la clase 1 . Por tanto la suma de clases da como resultado un número perteneciente o al grupo 1, al grupo 2 o al grupo 3. Ahora pasamos a estudiar los casos posibles:

A) Si entre los cinco elementos hay tres o más iguales, la propiedad se demuestra de una manera obvia.

A1) Si los tres son clase 0, su suma también lo es, y por tanto son múltiplo de 3, como lo demuestran las situaciones siguientes:

A2) Si los tres son clase 1, su suma es clase 3, es decir, clase 0, por tanto, múltiplo de 3.

A3) Si los tres son clase 2, su suma es clase 6, es decir, clase 0, por tanto, múltiplo de 3.

B) Además es claro que como mínimo habrá dos elementos iguales en el conjunto de 5, pues aunque haya tres distintos, alguno de los otros dos pertenecerá a uno de los tres conjuntos, por tanto, hay dos elementos de la misma clase juntos (Basado en el principio del palomar):

B1) Si los elementos son clase 0: Entre los otros 3 suponemos que no hay ningún 0 (pues llegaríamos al caso de que 3 son iguales), por tanto, o los 3 son clase 1 ó 2 todos (también los 3 iguales). Los otros tres pueden ser entonces combinaciones como 1,1,2 que al sumar 1 y 2 con un 0 de los iniciales obtenemos múltiplo de 3, o 1, 2, 2, donde ocurre lo mismo, por tanto de cualquier forma, llegaríamos a que es múltiplo de 3.

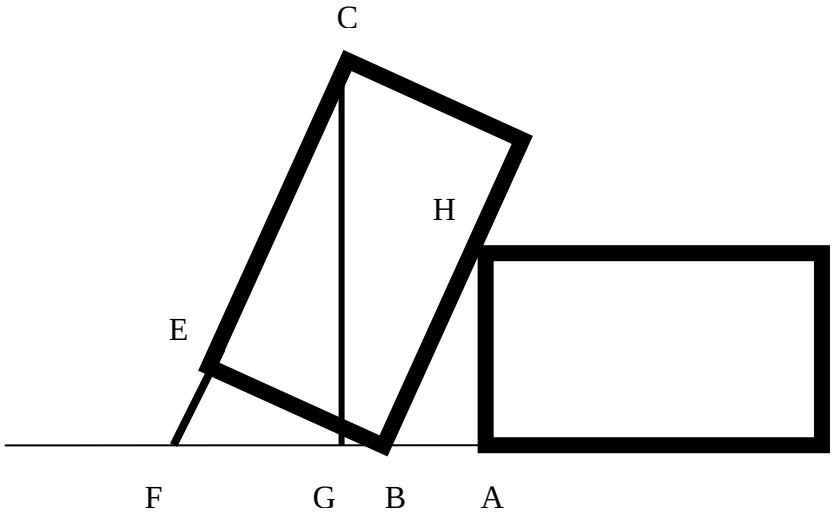
B2) Si los elementos son clase 1: Suponemos que no hay ningún 1 ni que los otros son todos 0 ó todos 2. Por tanto quedan las combinaciones 0, 0, 2 (donde sumando 0, 2 y un 1 inicial llegamos a que son 0, o sea, múltiplo de 3) o 0, 2, 2 (donde sumando 0, 2 y 1 inicial llegamos a la misma conclusión). Por tanto, ninguna combinación deja de ser múltiplo de 3.

B3) En caso de que fueran 2 de clase 2: Los otros no serían ni uno de

ellos un 2, ni todos 0, ni todos 1. Las combinaciones restantes son: 0, 0,1 (donde 0, 1,2 sumarían 0, múltiplo de 3) y 0, 1,1 (donde también 0, 1,2 suman 0, y también son, por tanto, múltiplos de 3) Como hemos podido comprobar, ninguno de todos los casos posibles nos lleva a una contradicción, por tanto, todas las posibles combinaciones de 5 números, permiten, sumando 3 de ellos conseguir un número que sea múltiplo de 3

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – BALDOSAS**

Por el dibujo se tiene que los triángulos ABH y BEF son iguales y por lo tanto el segmento EF mide 8 cm.
Como los triángulos ABH y CGF son semejantes
tenemos $\frac{\overline{AH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CF}}; \frac{10}{\overline{CG}} = \frac{\sqrt{164}}{28} \rightarrow \overline{CG} \cong 21,36$



- **Solución - Fase 2 - (14/16) – QUIEN PARTE Y REPARTE…**

Sea **x** el número de setas que recogieron por lo que:

x=3u+1 siendo **u** el número de setas que tomó el primer amigo, por tanto sobran **2u**

2u=3v+1 siendo **v** el número de setas que tomó el primer amigo, por tanto sobran **2v**

2v=3w+1 siendo **w** el número de setas que tomó el primer amigo, por tanto sobran **2w**

2w=3y+1 siendo **y** el número de setas que toma cada uno en el último reparto

3y+1 es par de donde **3y** y por tanto **y** también lo es. Siguiendo el mismo razonamiento **v** y **w** son impares

Dándole valores a **y**

y	w	v	u	x
1	**2 (par)**			
3	**5**	**8 (par)**		
5	**8 (par)**			
7	**11**	**17**	**26**	**79**

Por tanto una solución válida es 79 setas

- **Solución - Fase Final - (14/16) – ¿QUIERES SER MILLONARIO?**

La probabilidad de que el concursante escoja en su primera oportunidad la puerta que oculta el coche es de 1/3, por lo que la probabilidad de que el coche se encuentre en una de las puertas que no ha escogido es de 2/3. ¿Qué cambia cuando el presentador muestra una cabra tras una de las otras dos puertas?
Una suposición errónea es que, una vez sólo queden dos puertas, ambas tienen la misma probabilidad (un 50%) de contener el coche. Es errónea ya que el presentador abre la puerta *después* de la elección de jugador. Esto es, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador. Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de 1/3), entonces el presentador puede abrir

cualquiera de las dos puertas. Además, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad.
Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de 2/3), el presentador *sólo* tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, la puerta restante *tiene* que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.
En resumen, si mantiene su elección original gana si escogió originalmente el coche (con probabilidad de 1/3), mientras que si cambia, gana si escogió originalmente una de las dos cabras (con probabilidad de 2/3). Por lo tanto, el concursante debe cambiar siempre su elección.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – SIMPLIFICACIÓN DE ESCÁNDALO**

49999/99998 = 4999/9998 = 499/998 = 49/98 = 4/8 = 1/2.
16666/66664 = 1666/6664 = 166/664 = 16/64 = 1/4.
19999/99995 = 1999/9995 = 199/995 = 19/95 = 1/5.
Sea n el número de las cifras b de la fracción.
El numerador de la primera fracción es:

$$a\,10^n + b\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1) = a\,10^n + b\,(10^n-1)/9$$

El denominador de la primera fracción es:

$$b\,(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10) + c = b\,10\,(10^n-1)/9 + c$$

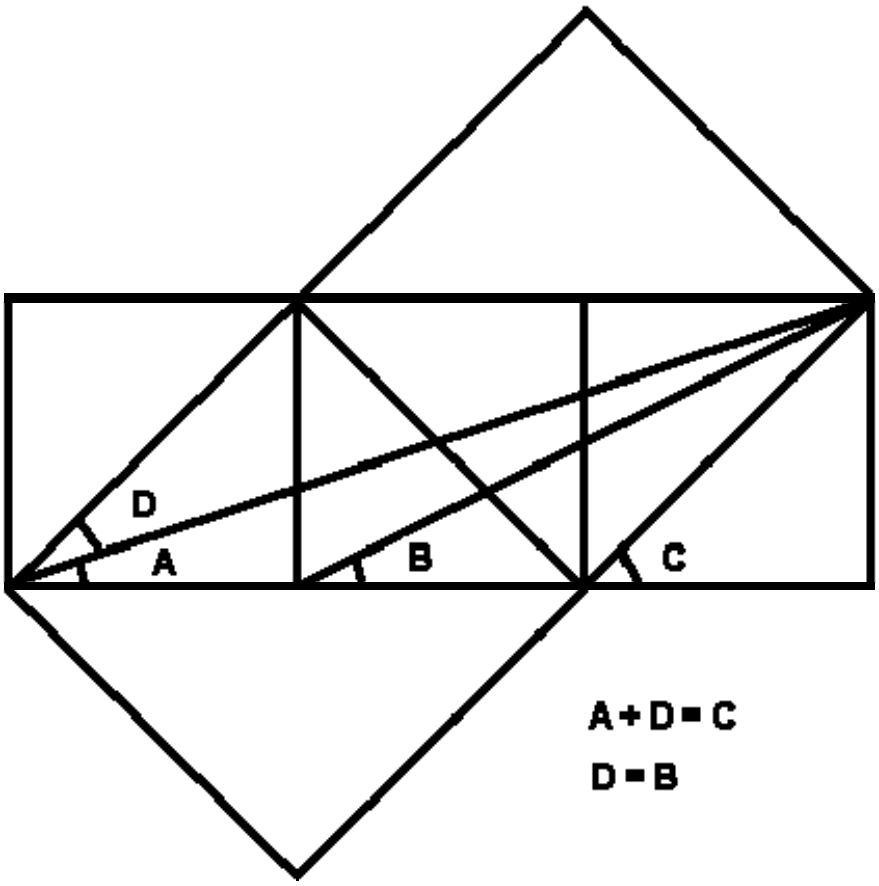
Transportemos a la fracción e igualemos los productos de los extremos y de los medios:

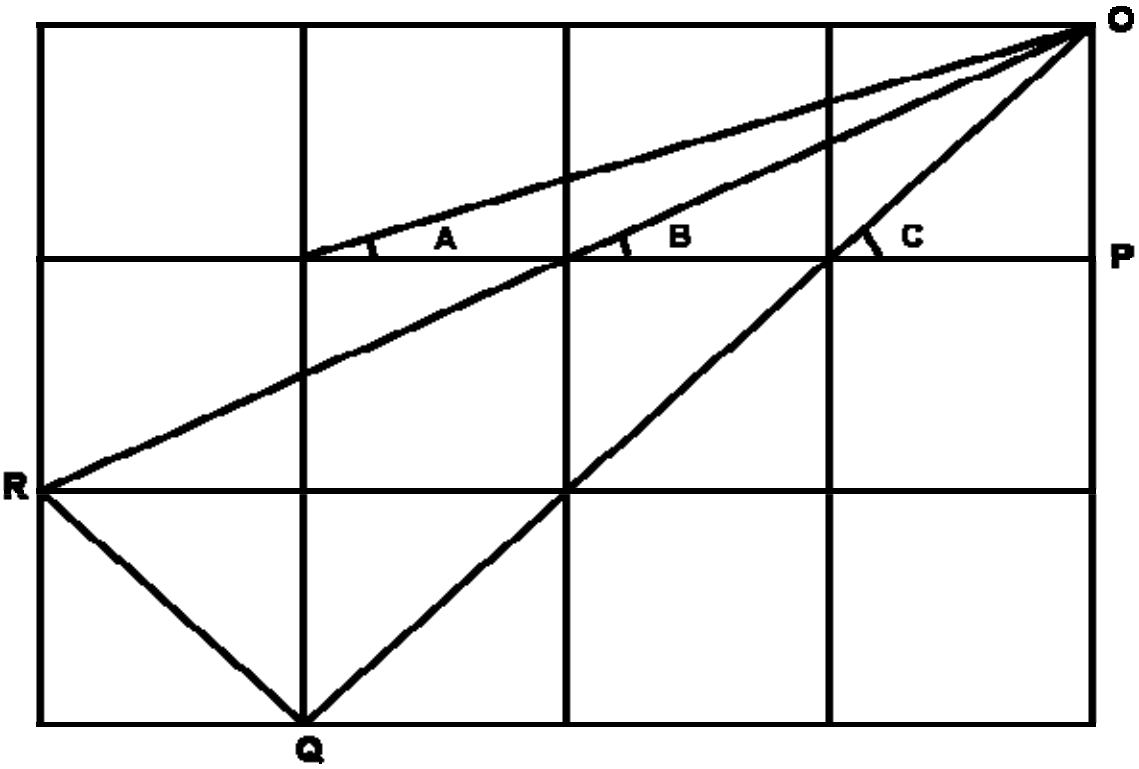
$$a\,10^n\,c + b\,(10^n-1)/9\,c = b\,10\,(10^n-1)/9\,a + c\,a$$

$$9ac = 10ab - bc \implies b = 9ac/(10a-c)$$ es la relación buscada.

Esta es la solución general, cuando es n el número de cifras b de la fracción. Particularizando para n=4, la solución se simplifica bastante.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – LOS TRES CUADRADOS**



Otra

Esta otra construcción también muestra la solución del problema.
Los triángulos APO y OQR son semejantes, por lo que los ángulos A y O son iguales. Y como C=B+O, C=B+A.