Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
S.C.M.P.M.

ISBN 84-689-5194-36
Depósito legal Albacete -513-2006

LOS AUTORES
Antonio Bueno Aroca
Bernardino Del Campo López
Jesús García Segovia
Juan Emilio García Jiménez
Juan Martínez-Tébar Giménez
Martín Fernández Carrión
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta
Vicente Pascual Fidalgo

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete.

También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI.

Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes “resolutores”, el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

.

Esta edición los finalistas han sido:

CICLO 12-14	CICLO 14-16
ARENAS ESCRIBANO, CARLOS	BARRIUSO MEDRANO, ADRIÁN
ATIENZAR MARTÍNEZ, ALEJANDRO	CEBRIÁN GARCÍA, ANTONIO
BEA SERRANO, CARLOS	ESTESO CARRIZO, VICTORIA
BLÁZQUEZ MOLINA, FRANCISCO	JIMÉNEZ MARTÍNEZ, CORTES MARÍA
FERNÁNDEZ ESCOBAR, CARLOS	KRASIMIROV VLADIMIROV, MIROSLAV
MÁRQUEZ COSTA, JUAN PABLO	MARTÍNEZ GARCÍA, Mª NIEVES
PARREÑO TORRES, CONSUELO	RODRÍGUEZ GARCÍA, JORGE PABLO
RODRÍGUEZ RUIZ, ALEJANDRO	SOLERA RALLO, JAVIER
SANZ, GUILLERMO	TOMÁS MARTÍNEZ, DANIEL
ZAMORA CARBÓ, JOSÉ FIDEL	TORTOSA COLLADO, DAVID

Profesores y alumnos finalistas en Minaya

Además de la Olimpiada la SCMPM en colaboración con la Diputación de Albacete, la CCM y otras entidades han desarrollado a lo largo de este curso otras actividades

2005 fue el año del Quijote y casi se nos escapa un centenario importantísimo para los albaceteños, el de nuestro arquitecto más universal, Andrés de Vandelvira. Conjuntamente con el Instituto de Estudios Albacetenses se organizó un ciclo de conferencias y una exposición, donde pudimos admirar el magnífico trabajo de los alumnos de Arquitectura de nuestro querido amigo Rafael Pérez de la Universidad de Granada, bajo el título: **"Andrés de Vandelvira V centenario. Cuando la Geometría se hace Arquitectura".**

Los futuros Arquitectos y el propio Rafael nos deleitaron con dos magnificas exposiciones sobre la vida y obra nuestro ilustre paisano nacido en la ciudad de Alcaraz hace ya 500 años.

En 2006 las Matemáticas y los problemas, han vuelto ha salir a la calle donde por medio del juego se han acercado a todos los públicos para enseñar y divertir.

Contamos para la ocasión con nuestros amigos sevillanos del grupo Alquerque:
José Muñoz Santonja, Antonio Martínez Aliseda y Juan A. Hans. Martín.
Por esta actividad organizada por los profesores de la SCMPM y financiada por la CCM, pasaron unos 2000 alumnos de toda la provincia y un número indeterminado de público en general.

Además este año la Olimpiada se ha internacionalizado. En los meses de mayo y octubre se ha realizado un intercambio de alumnos de la Olimpiada albaceteña con alumnos de Reggio Emilia (Italia), pertenecientes al Liceo “Aldo Moro” y la Escuela media “Einstein”.

Durante estas dos semanas los alumnos han conocido otro país, otra cultura y que las Matemáticas son las mismas en todo el mundo. Los alumnos y los profesores de los dos países han compartido su gusto por las Matemáticas y han disfrutado con todo tipo de actividades.

Una Guinda más al pastel:

El alumno de Albacete Ángel David Martínez Martínez, obtuvo en Sevilla la medalla de oro en la XLII edición de Olimpiada Matemática Española, organizada por la Real Sociedad Matemática Española.

Ángel ya se clasificó en primer lugar en la fase regional y fue uno de los tres representantes de Castilla la Mancha en este evento.

Este mes de Julio viajó a Eslovenia para participar en la XLVII Olimpiada Matemática Internacional.

No es la primera experiencia que tiene en estos eventos, ya que Ángel David ha sido finalista en varias ocasiones en la Olimpiada provincial de Albacete, Organizada por la SCMPM, participando además en la fase regional de la misma, obteniendo una excelente calificación por lo que participó representando a Castilla la Mancha en la Olimpiada Nacional organizada por la FESPM, demostrando ya en estas ediciones un gran talento matemático.

Es una satisfacción para nosotros ver como la labor emprendida en estas ediciones tiene continuidad y frutos tan brillantes como el cosechado por Ángel David,

Por último deciros que desde la Consejería de Educación ha querido distinguirnos en el Día de la Enseñanza 2006 por nuestra aportación a la enseñanza de las Matemáticas y por la organización de la Olimpiada Matemática Regional, siendo nuestra Olimpiada Provincial de Albacete el germen de ella..

Aquí tenéis la carta donde el consejero notifica a nuestro presidente la distinción.

Castilla-La Mancha

Consejería de
Educación y Ciencia

E. Consejero

SERAPIO GARCÍA CUESTA
ASOCIACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE CASTILLA-LA MANCHA
C/ SAN ANTONIO, 47
02002 ALBACETE

Toledo, 10 de enero de 2007

Estimado Serapio:

Como ya sabes, la Consejería de Educación y Ciencia, instituyó el Día de la Enseñanza para resaltar y valorar la hermosa y noble tarea de educar y, también, para poner de manifiesto la importancia de los profesionales e instituciones cuyo cometido es no sólo el de enseñar, sino el de ayudar al desarrollo de las personas para crear una sociedad mejor.

En educación todos tenemos nuestra parte de responsabilidad: los profesores y profesoras, los alumnos y alumnas, los padres y madres, el personal de administración y servicios y las instituciones. Nuestro protagonismo reside en compartir objetivos y en realizar bien cada uno nuestra tarea.

Con el Día de la Enseñanza queremos hacer público reconocimiento a la excelente labor educativa y social que realizan las personas y las instituciones de nuestra Comunidad y aprovechar la celebración para que la ciudadanía de Castilla-La Mancha conozca las actuaciones y los esfuerzos más sobresalientes, los trabajos bien hechos, en suma, que suponen un paso más para el progreso de nuestra Región.

Por ello, la Consejería de Educación y Ciencia ha resuelto distinguiros por vuestra aportación a la enseñanza de las matemáticas y por la organización de la Olimpiada Matemática.

En nombre de la Comunidad Educativa y en el mío propio, agradezco que, junto a la aceptación del reconocimiento que se os propone, nos acompañéis en el acto institucional que celebraremos el día **26 de enero**, a las **12,00 horas**, en el **Auditorio de Talavera Ferial de Talavera de la Reina (Toledo)**, y que será **presidido por el Presidente de Castilla-La Mancha, José María Barreda Fontes.**

Recibe un atento saludo.

José Valverde Serrano

Bulevar del Río Alberche, s/n - 45071 TOLEDO

XVII Olimpiada Provincial de Albacete

Nivel 12/14

Primera Fase

Problema 1. MOZART ÁUREO
Problema 2. HORA RELATIVA
Problema 3. EL GORDO DE NAVIDAD
Problema 4. DOS Y DOS SON CUATRO, CUATRO Y DOS SON…
Problema 5. ESCALERA NUMÉRICA
Problema 6 SUPERPUESTOS

Segunda Fase

Problema 1. ¿RUEDA CUADRADA?
Problema 2. NÚMEROS CURIOSOS
Problema 3. DULCE REPARTO

Fase Final

Problema 1. EL REBAÑO
Problema 2 CORTANDO TRIÁNGULOS
Problema 3.CHIN-CHIN ARQUÍMEDES

Nivel 14/16

Primera Fase

Problema 1. ¿JUEGA MOZART A LOS DADOS?
Problema 2. TRIÁNGULO CIRCULAR
Problema 3. LA CIFRA DE LAS UNIDADES
Problema 4. ESFERAS
Problema 5. ¿VIAJE EN EL TIEMPO?
Problema 6. LEY ANTI-TABACO

Segunda Fase

Problema 1. CARNAVAL MATEMÁTICO
Problema 2. PAPIRO DE AHMES
Problema 3. HOLA DON PEPITO

Fase Final

Problema 1. DADOS Y FRACCIONES
Problema 2. EL RELOJ QUE ATRASA
Problema 3.CÍRCULOS Y TANGENCIAS

Soluciones

XVII Olimpiada

Minaya 2006

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. MOZART ÁUREO

Celebramos en 2006 el 250 aniversario del más grande compositor de la historia, Wolfang Amadeus Mozart.

En varias sonatas para piano de Mozart, la proporción entre el desarrollo del tema y su introducción es la más cercana posible a la razón áurea. Esto se consigue a través de la serie de Fibonacci:

a) Escribe por lo menos los treinta primeros términos de la sucesión de Fibonacci

b) ¿Cuáles son pares? ¿Qué lugar ocupan en la sucesión? ¿Qué significa que un número ocupe el segundo, tercero, cuarto o enésimo lugar en una sucesión?

c) ¿Cuáles son múltiplos de 3? ¿Qué lugar ocupan en la sucesión?

d) Realiza el mismo análisis con los múltiplos de 5, 8 y 13 ¿Por qué se eligieron estos números?

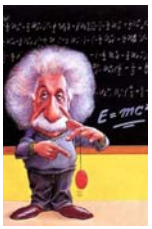
e) Si hallas alguna regularidad, exprésala en palabras.

f) A modo de ayuda y como resumen de lo obtenido, completa el siguiente cuadro agregando más filas y columnas:

Lugar que ocupan	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Términos de la sucesión.	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	*34*
¿Múltiplo de 2?	*no*	*no*	*sí*	*no*	*no*	*sí*	*no*	*no*	*sí*
¿Múltiplo de 3?	*no*	*no*	*no*	*sí*	*no*	*no*	*no*	*sí*	*no*

Ya podemos intuir que cada término de la sucesión de Fibonacci es divisor de infinitos números de la sucesión. Pero, ¿Qué sucede con los números que no son términos de la sucesión de Fibonacci? ¿Hay múltiplos de 4?, ¿y de 6?, ¿y de 7? Observa hasta los múltiplos de 10. ¿Te animas a extraer alguna conclusión?

F.1 (12/14) Problema 2. HORA RELATIVA



Este pasado año 2005 ha estado lleno de centenarios. Sin lugar a dudas el más importante para la Ciencia ha sido el centenario de la publicación de la teoría de la relatividad especial por Albert Einstein en 1905.

Una de sus muchas consecuencias, es que a grandes velocidades el tiempo se ralentiza y son posibles los "viajes al futuro".

No debemos confundir este concepto con nuestra percepción subjetiva.

Si estamos disfrutando, el tiempo "pasa" rápidamente, mientras que si nos aburrimos cada segundo nos parece eterno y nuestras ganas de que llegue la media noche nos lleva a plantearnos:

"Si fueran dos horas más tarde, faltaría para la media noche la mitad de lo que faltaría si fuera una hora más tarde". ¿Qué hora es?

F.1 (12/14) Problema 3. EL GORDO DE NAVIDAD

Juan y Elena, van a la Administración de lotería a comprarle un décimo a su tía Pilar. Pero de camino a casa, se acercan al estanque de los patos, con el billete en la mano y cuando se aproximan a verlos, un pato le estira del billete y le arranca un trozo.

Rápidamente, Juan y Elena van a contárselo a su tía Pilar, y ésta se dirige a la Administración de lotería y solicita que le cambien el billete, por otro con el mismo número. El administrador de lotería les contesta: ***"únicamente le puede cambiar el billete si me dice el número de serie del billete, que consta de seis dígitos, y es la parte que le falta al billete".***

Pilar les pregunta a sus sobrinos, ¿Cuál es el número de serie del billete?

Juan, contesta: Yo recuerdo que era un número capicúa y par.

Elena, responde.: Al dividir el número entre 8, no era una división exacta, y al multiplicar todos sus números obtuve el número 44100.

¿Puede Pilar, conocer con certeza el número de serie?

F.1 (12/14) Problema 4. DOS Y DOS SON CUATRO, CUATRO Y DOS SON…

En esta suma cada letra representa un número.

No puede haber dos letras que representen el mismo número ni dos números distintos representados por la misma letra.

Averigua que número corresponde a cada letra.

```
  D O S
  D O S
  D O S
+ D O S
---------
  O C H O
```

F.1 (12/14) Problema 5. ESCALERA NUMÉRICA

Se disponen los números pares de la siguiente manera:

			20
		12	***18***
	6	***10***	***16***
2	***4***	***8***	***14***

Como puedes ver forman una escalera numérica.

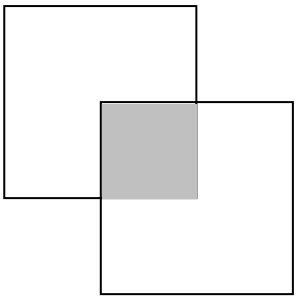
En el primer escalón hay únicamente un número, en el segundo escalón dos números, etc. Si seguimos construyendo escalones.

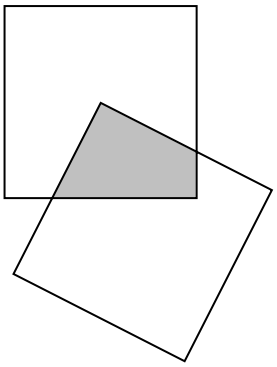
a) ¿Qué número está en el peldaño superior del vigésimo (20º) escalón?

b) ¿En qué escalón está el número 2006?, ¿sabrías exactamente en qué peldaño?

F.1 (12/14) Problema 6. SUPERPUESTOS

Tenemos dos cuadrados iguales superpuestos, de manera que un vértice de uno está siempre en el centro del otro. ¿En que posición el área común es la mayor posible?

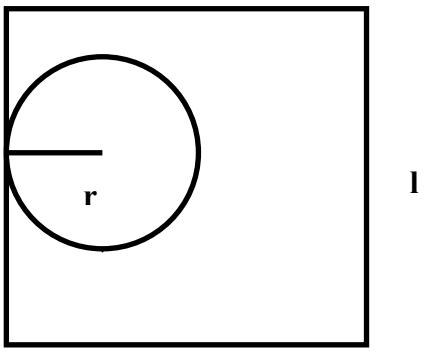




Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. ¿RUEDA CUADRADA?

*Un círculo de radio **r** rueda sobre todo el borde interior de un cuadrado de lado **l** (evidentemente l>2r). ¿Qué distancia recorre el centro del círculo?*



F.2 (12/14) Problema 2. NÚMEROS CURIOSOS

¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que la última es la suma de las otras dos?

F.2 (12/14) Problema 3. DULCE REPARTO

Si repartimos dos cajas de bombones entre seis amigos sobran cuatro bombones. ¿Cuántos sobrarán si repartimos tres cajas?.

Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. ELREBAÑO

Alonso sólo sabía contar hasta diez y tenía un rebaño de poco más de 300 ovejas que le daban leche para hacer rico queso manchego de Minaya. Para saber si no le faltaba ninguna oveja, ideó un sistema que ponía en práctica todos los días al caer la tarde. Agrupaba a sus animales de 2 en 2, luego de 3 en 3, más tarde de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6. En todos los casos le sobraba una oveja. Finalmente, las agrupaba de 7 en 7 y entonces no le sobraba ninguna.

¿De cuántas ovejas se componía el rebaño de Alonso?

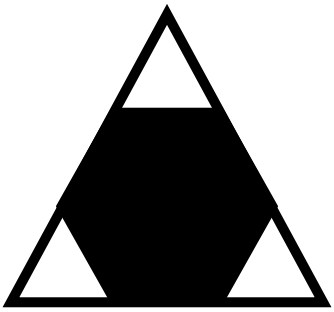
F.F (12/14) Problema 2. CORTANDO TRIÁNGULOS

Un triángulo equilátero tiene un área múltiplo de 11.

Cortamos triángulos equiláteros en sus esquinas formando un hexágono regular.

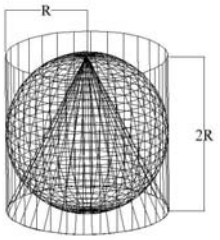
El área del hexágono es ahora un múltiplo de 3

¿Cuál es el área posible de ese hexágono?



F.F (12/14) Problema 3. CHIN-CHIN ARQUÍMEDES

Cuenta la tradición que Arquímedes indicó que sobre su tumba se esculpiera un cilindro y en él una esfera inscrita. La relación entre los volúmenes de ambos cuerpos es que el $V_{cilindro} = \frac{3}{2} V_{esfera}$



También llegó a la relación entre el volumen del cilindro y el del cono en él inscrito siendo $V_{cono} = \frac{1}{3} V_{cilindro} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Seguro que después de estos y otros grandes descubrimientos Arquímedes brindó con cava en una copa cónica. Pero como quería cuidarse solamente se tomaba media copa cada vez (hacía muchos descubrimientos).

Si Arquímedes llenaba la copa hasta la mitad de la altura de la misma ¿Se tomaba media copa? ¿Qué cantidad se tomaría en tal caso?

¿A qué altura debería de llenarla para tomarse de verdad media copa?

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. ¿JUEGA MOZART A LOS DADOS?

Celebramos en 2006 el 250 aniversario del más grande compositor de la historia, Mozart.

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) compuso la obra Musikalisches Würfelspiel, (Juego de dados musical) singular creación artística en la que el ingenio del músico lo llevó a componer no una pieza para piano sino un generador de valses. Esto es, la obra no contiene una partitura para un pequeño vals de 16 compases sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar un número muy grande de valses diferentes de 16 compases cada uno.

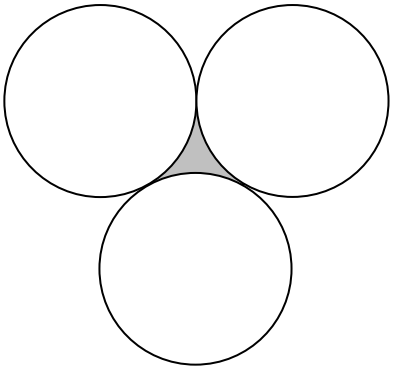
Mozart escribió 176 compases numerados del 1 al 176 y los agrupó en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. El procedimiento para generar un vals particular a partir de esta combinación de habilidad en la composición y el uso del azar, consiste en que cada compás del 1 al 16 se selecciona con unos dados (la suma de los puntos al lanzar dos dados da un número del 2 al 12) del correspondiente conjunto de 11 compases

¿Cuántos Valses son posibles formar con este método?

¿Crees que es exagerado decir cada vez que se interpreta siguiendo este método que es un estreno?

F.1 (14/16) Problema 2. TRIÁNGULO CIRCULAR

Halla el área de la zona color gris, sabiendo que las tres circunferencias son idénticas y tienen 10 cm. de radio.



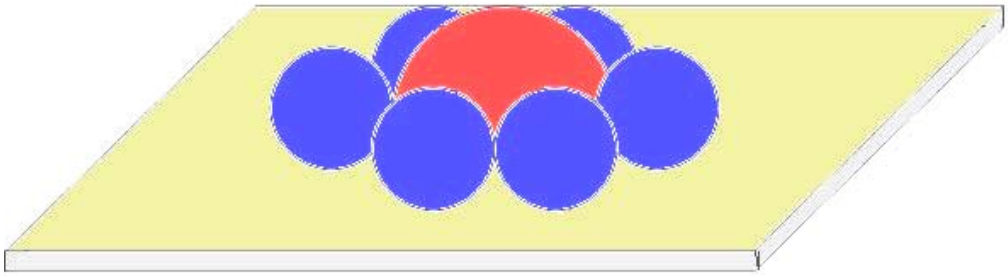
F.1 (14/16) Problema 3. LA CIFRA DE LAS UNIDADES

Ya que acabamos de comenzar el año 2006, ¿podrías deducir cuál será la cifra de las unidades del resultado de esta suma?

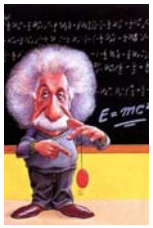
$$1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}$$

F.1 (14/16) Problema 4. ESFERAS

Sobre un tablero hay una semiesfera de radio 1 apoyada sobre su base, y 6 esferas iguales de radio R, cada una tangente a la semiesfera, al tablero, y a otras dos esferas. Halla el valor de R.



F.1 (14/16) Problema 5. ¿VIAJE EN EL TIEMPO?



El pasado año 2005 ha estado lleno de centenarios. Sin lugar a dudas el más importante para la Ciencia ha sido el centenario de la publicación de la teoría de la relatividad especial por Albert Einstein en 1905.

Una de sus muchas consecuencias, es que a grandes velocidades el tiempo se ralentiza y son posibles los "viajes al futuro".

Hemos viajado al futuro y estamos en una nave espacial. A veinte millones de kilómetros se encuentra otra nave de nuestra flota que viene a nuestro encuentro. Desde nuestra nave parte un cohete rápido hacia la otra, y cuando llega a ella vuelve hacia nosotros de forma inmediata y así prosigue su ida y vuelta hasta que las dos naves se encuentran.

Las dos grandes naves llevan una velocidad constante, recorriendo medio millón de kilómetros en un día, mientras que el cohete viaja a una velocidad de un millón de kilómetros al día. ¿Qué distancia recorre el cohete?

F.1 (14/16) Problema 6. LEY ANTI-TABACO

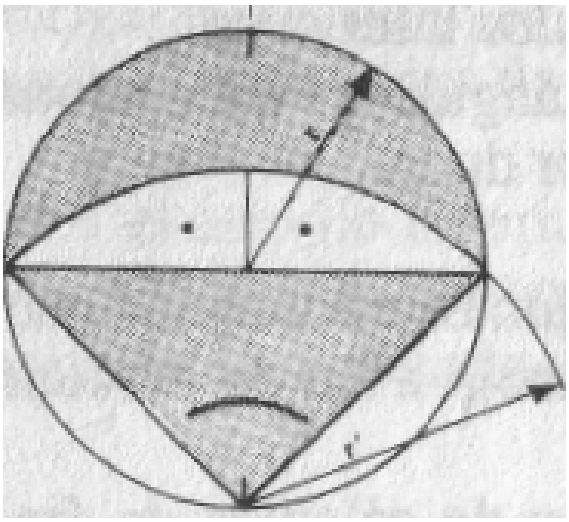
Cuatro matrimonios cenaban juntos en la Nochevieja de 2005. Después del postre Diana se fumó tres cigarros, Isabel dos, Inmaculada cuatro y Mariana se fumó un cigarrillo. Simón fumó lo mismo que su mujer, Pedro el doble que la suya, Agustín el triple que la suya y Carlos el cuádruplo que la suya. Sabiendo que en total se fumaron 32 cigarrillos, ¿cómo se llamaba la mujer de Agustín?

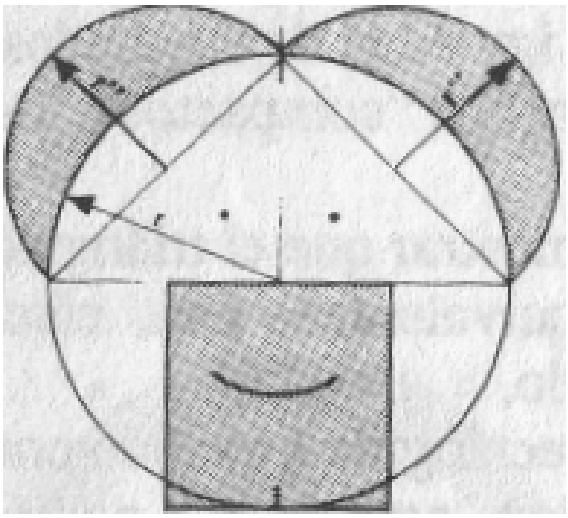
(Después de esta cena todos han hecho el firme propósito de dejar de fumar)

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. CARNAVAL MATEMÁTICO

Estas mascaras se componen esencialmente de unas figuras circulares especiales, llamadas lúnulas. La lúnula es la parte del plano comprendido entre dos arcos de círculo con los mismos extremos y con las concavidades hacia el mismo lado. Dos ejemplos de lúnulas son los siguientes.





En los dos dibujos, la barba ocupa la misma superficie que la cabellera (son las áreas sombreadas).

Ni más ni menos. Pero falta demostrarlo.

F.2 (14/16) Problema 2. PAPRIRO DE AHMES

La resolución de problemas matemáticos no es ninguna novedad. En el siglo XIX se descubrió un papiro, llamado de Rhind por el anticuario que lo compró, aunque también es conocido como de Ahmes por el escriba que lo copió, en el que están escritos una serie de 84 problemas matemáticos de hace más de 2000 años ¿Te atreves con uno?

Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió una cantidad más que la primera ,esa misma cantidad de más la recibió la tercera más que la segunda, la cuarta más que la tercera y la quinta más que la cuarta. Además las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada uno?

F.2 (14/16) Problema 3. HOLA DON PEPITO…

Cinco matrimonios acuden a una reunión. Se saludan de manera impredecible y curiosa, con tres normas:

a) nadie se saluda a sí mismo

b) nadie saluda a su pareja.

c) puedes dejar sin saludar a alguien que no seas tu mismo o tu pareja.

Uno de los maridos (Pepe) es matemático, y tiene la ocurrencia de preguntar a todos: ¿A cuántas personas has saludado? Naturalmente, a sí mismo no se pregunta. Se lleva la sorpresa de que todas las respuestas son diferentes.

¿A cuántas personas ha saludado Pepita, su mujer?

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. DADOS Y FRACCIONES

Lanzamos dos dados y, con los números que aparecen formamos una fracción menor o igual que uno.

Juan dice que, en la próxima tirada, la fracción será reducible y Pepe que será irreducible. ¿Quién de los dos tiene más posibilidades de acertar?

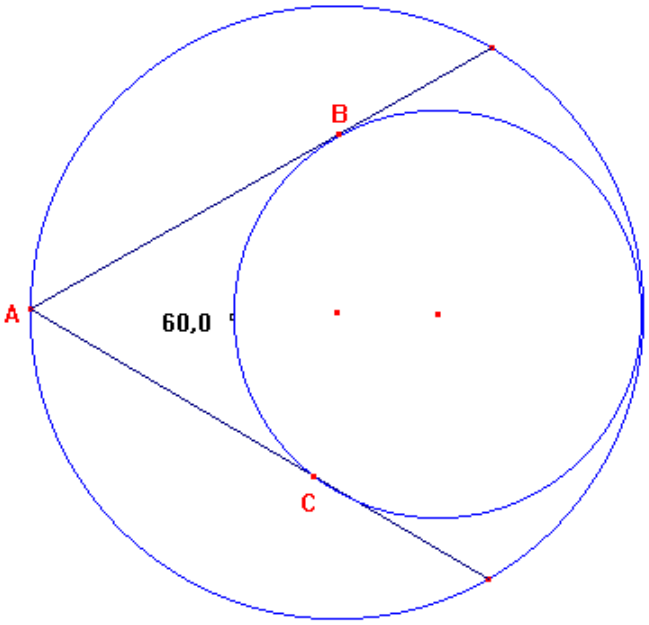
F.F (14/16) Problema 2. EL RELOJ QUE ATRASA

El reloj de manecillas de la iglesia de Santiago el Mayor de Minaya se atrasa quince minutos cada dos horas. Cuando señala las cinco y cuarto se desprende la manecilla que señala los minutos, pero el reloj sigue marchando.

Transcurridas tres horas y veinte minutos de tiempo real, ¿cuánto medirá el ángulo que debe recorrer la manecilla de las horas para señalar las doce en punto?

F.F (14/16) Problema 3. CÍRCULOS Y TANGENCIAS

Si el área del círculo grande de la figura es 1 m², y el círculo menor es tangente interior al círculo grande, y a los lados del ángulo inscrito que mide 60º. ¿Cuál es el área del círculo menor?



Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – MOZART ÁUREO**

a) Los primeros treinta términos de esta sucesión son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229 y 832040.

b) Para obtener la posición de los números pares de la sucesión de Fibonacci tendremos en cuenta que:

impar + impar = par
par + impar = impar

así, si escribimos la paridad de cada término de la sucesión obtenemos:

impar, impar, par, impar, impar, par, impar, impar, par, impar, impar, par, ...

vemos entonces que los números pares ocupan los lugares: 3, 6, 9, 12,....
Por lo tanto, si un término ocupa el lugar *n* podemos asegurar que es un número par si *n* es un múltiplo de 3, e impar en caso contrario.
Es decir:

$$Si \quad n = \dot{3} \quad \Rightarrow \quad par$$

$$Si \quad n \neq \dot{3} \quad \Rightarrow \quad impar$$

c) Veamos ahora qué números de la serie son múltiplos de 3, para ello escribimos algunos términos de la sucesión, marcando los múltiplos de 3:

1, 1, 2, **3**, 5, 8, 13, **21**, 34, 55, 89, **144**, 233, 377, 610, **987**, 1597, 2584, 4181, **6765**,...

Podemos apreciar que regularmente cada cuatro términos aparece un múltiplo de 3. Estudiemos esta regularidad, para ello tomemos cinco términos seguidos de la sucesión de Fibonacci, suponiendo que el primero de ellos es múltiplo de 3.

Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tales que: $a_3 = a_2+a_1$, $a_4 = a_3+a_2$, $a_5 = a_4+a_3$ y $a_1=\dot{3}$.
Tenemos que:

$$a_5 = a_4+a_3 = a_3+a_2+a_2+a_1 = a_2+a_1+a_2+a_2+a_1=3.a_2+2.a_1$$

De esta igualdad se deduce que $a_5=\dot{3}$, por ser múltiplos de tres los dos sumandos de su parte izquierda.

Además a_2 no puede ser múltiplo de 3, porque si dos términos consecutivos fuesen múltiplos de 3, toda la sucesión estaría compuesta por múltiplos de 3, cosa que no ocurre, y tampoco a_3 puede ser múltiplo de 3, ya que, si lo fuese lo sería también a_2.

Por los tanto podemos concluir que:

$$Si \quad n = \dot{4} \quad \Rightarrow \quad múltiplo\ de\ 3$$

$$Si \quad n \neq \dot{4} \quad \Rightarrow \quad no\ múltiplo\ de\ 3$$

d) Procederemos igual que en el apartado anterior, comenzando por los múltiplos de 5.

1, 1, 2, 3, **5**, 8, 13, 21, 34, **55**, 89, 144, 233, 377, **610**, 987, 1597, 2584, 4181, **6765**,...

En este caso parece que, a partir de un múltiplo de 5, cada 5 términos aparecerá un nuevo múltiplo, veamos que es así. Para ello, sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, tales que:

$a_3 = a_2+a_1$, $a_4 = a_3+a_2$, $a_5 = a_4+a_3$, $a_6 = a_5+a_4$ y $a_1=\dot{5}$. Tenemos que:

$$a_6 = a_5+a_4 = a_4 +a_3+ a_3+a_2 = (a_3+a_2)+(a_2+a_1)+ (a_2+a_1) +a_2$$

Si seguimos descomponiendo llegamos a: $a_6 = 5.a_2 + 3.a_1$

Y esta igualdad se deduce que $a_6=\dot{5}$, por ser múltiplos de cinco los dos sumandos de su parte izquierda.

Estudiando los múltiplos de 8 tenemos:

1, 1, 2, 3, 5, **8**, 13, 21, 34, 55, 89, **144**, 233, 377, 610, 987, 1597, **2584**, 4181, 6765,...

Y con los de 13:

1, 1, 2, 3, 5, 8, **13**, 21, 34, 55, 89, 144, 233, **377**, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, **10946**...

Razonando en estos casos como en los anteriores obtenemos que a partir de un múltiplo de 8, cada 6 términos aparece un nuevo múltiplo de 8, y que a partir de un múltiplo de 13, cada 7 términos aparece un nuevo múltiplo de 13.

En resumen hemos obtenido:

Término	Lugar que ocupa	
2	3	cada 3 términos aparece un número par
3	4	cada 4 términos aparece un múltiplo de 3
5	5	cada 5 términos aparece un múltiplo de 5
8	6	cada 6 términos aparece un múltiplo de 8
13	7	cada 7 términos aparece un múltiplo de 13

Y estos números se eligieron porque pertenecen a la sucesión de Fibonacci.

e) Si lamamos F(n) al término de la sucesión que ocupa el lugar n, para todo número natural, k, podemos decir que F(k.n) es múltiplo de F(n):

$$\forall k \in N, \quad F(k.n) \in \dot{F}(n)$$

f) Ahora no es difícil completar el cuadro dado, agregando más filas y columnas:

Lugar	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
Términos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
mult. de 2	no	no	si	no	no	si	no	no	si	no	no	si	no	no	si
mult. de 3	no	no	no	si	no	no	no	si	no	no	no	si	no	no	no
mult. de 5	no	no	no	no	si	no	no	no	no	si	no	no	no	no	si
mult. de 8	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	si	no	no	no
mult. de 13	no	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	si	no

Para estudiar lo que ocurre con los números que no son términos de la sucesión de Fibonacci podemos ver que sucede con el 4.

El primer término de la sucesión que es múltiplo de 4 es el 8, que ocupa el sexto lugar, el siguiente múltiplo es 144, que ocupa el lugar 12, y el siguiente múltiplo aparecerá en el lugar 18, así, razonando como antes podemos demostrar que cada 6 lugares aparecerá un múltiplo de 4. Es decir, cada por dos múltiplos de 2 que aparezcan aparecerá un múltiplo de 4, por ser $4=2^2$.

Con respecto al número 6 podemos observar que, por ser 6=2.3, el primero de sus múltiplos en la sucesión de Fibonaci ocupará el lugar 12, igual al m.c.m.(3,4). A partir de ese términos, cada 12 lugares aparecerá un múltiplo de 6.

El número 7 es primo, en consecuencia debemos buscar su primer múltiplo en la sucesión, que es 21, ocupando el lugar 8, podemos comprobar que cada ocho términos aparecerá un múltiplo de7.

El número 9 es igual a 3^2, ocupando el número 3 el lugar 4, y ocurrirá que, cada tres múltiplos de 3 aparecerá un múltiplo de 9, es decir, el primer múltiplo de 9 aparecerá en el lugar 12, y así, cada 12 lugares aparecerá un nuevo múltiplo de 9.

Por último observamos que el número 10 se descompone como 2.5, números primos que son términos de la sucesión y que cumplen que el 2 se repite cada 3 lugares y el 5 cada 5, entonces, como m.c.m.(3,5)=15, el primer múltiplo de 10 aparecerá en el lugar 15, y a partir de ahí, cada 15 lugares aparecerá un nuevo múltiplo de 15.

A modo de conclusión podríamos decir que dado un número natural cualquiera, *h*, existirá un múltiplo de *h* que pertenecerá a la sucesión, basta tomar por ejemplo 2.*h*, este número ocupará un lugar en la sucesión, por ejemplo el lugar *k*, y a partir de ahí, de forma regular, cada *k* términos de la sucesión aparecerá un nuevo múltiplo de *h*, en consecuencia, la sucesión de Fibonacci contiene una cantidad infinita de múltiplos de cualquier número natural.

De esta maravillosa sucesión se pueden extraer muchas más conclusiones, si continuas disfrutando con su estudio podrás alcanzar cuantas desees.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – HORA RELATIVA**

Sea x la hora buscada.
Sea y el número de horas que faltan para la media noche a partir de de pasadas dos desde la actual.
De la primera condición, obtenemos:
$x + 2 + y = 12$
De la segunda condición, obtenemos:
$x + 1 + 2\ \ y = 12$
Resolviendo el sistema, obtenemos que $x = 9$ Es decir, que son las nueve... de la noche

Solución de Alejandro Martínez Atienzar de 1º ESO

ALEJANDRO ATIÉNZAR MARTÍNEZ 1º ESO GRUPO B I.E.S. BACHILLER SABUCO

OLIMPIADA MATEMATICA

XVII OLIMPIADA. PRIMERA FASE.
NIVEL 12-14. PROBLEMA Nº 2

HORA RELATIVA

Este pasado año 2005 ha estado lleno de centenarios. Sin lugar a dudas el más importante para la Ciencia ha sido el centenario de la publicación de la teoría de la relatividad especial por Albert Einstein en 1905.

Una de sus muchas consecuencias, es que a grandes velocidades el tiempo se ralentiza y son posibles los "viajes al futuro".

No debemos confundir este concepto con nuestra percepción subjetiva.

Si estamos disfrutando, el tiempo "pasa" rápidamente, mientras que si nos aburrimos cada segundo nos parece eterno y nuestras ganas de que llegue la media noche nos lleva a plantearnos:

"Si fueran dos horas más tarde, faltaría para la media noche la mitad de lo que faltaría si fuera una hora más tarde". ¿Qué hora es?

Hacemos una línea recta que representará el tiempo, donde marcaremos un punto A que será la hora actual. Un poco más allá marcamos otro punto B donde son 2 horas más de las de ahora.

Entonces, marcamos un punto C a una hora más tarde de la actual (será el punto medio entre el punto A y B) y otro punto D donde serán las 12 horas (que se colocará a una distancia X del punto B hacia la derecha)

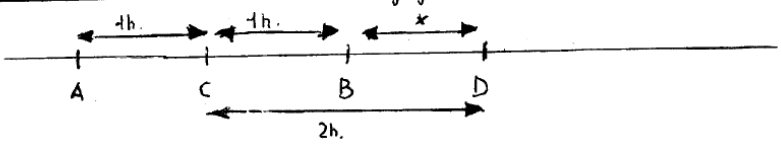
Después calculamos que desde C a B hay la mitad de distancia que de C a D. Entonces, sabiendo que de C a B hay 1 hora, de C a D hay 2 horas.

Luego, sumamos las distancias desde A a D, que dan 3 horas.

Esto significa que ahora SON LAS 9 HORAS, porque 12 h. - 3 h. = 9 horas.

Dos horas más tarde, serán las 11 h. y faltaría 1 h. para la medianoche.

Una hora más tarde, serán las 10 h. y faltarán 2 h. para la medianoche.



XVII OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – ELGORDO DE NAVIDAD**

Como el número es capicúa, y de 6 dígitos será de la forma:

abccba.

Además como el producto de todos sus números su producto es 44100, será:

$a.b.c.c.b.a = a^2.b^2.c^2 = (a.b.c)^2 = 44100.$

Pero, como $\sqrt{44100} = 210$, será:

$a.b.c = 210$

Teniendo en cuenta que 210 = 2.3.5.7, abc será de algunas de la formas:
abc = 657; abc = 675; abc = 567; abc = 576; abc = 756;
abc = 765

Y como sabemos que es un número par, el último número tiene que ser par. Luego solamente puede ser abc de la forma:
abc = 657; abc = 675;
Por tanto, el número será de la forma:
657756 ó 675576;
Pero, además si cada uno de estos números lo dividimos por será:
657756: 8 = 82219,5 y 675576: 8 = 84447
Luego, el único número de los dos que no es múltiplo de 8 es:
657756
Que es el número buscado.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – DOS Y DOS SON CUATRO, CUATRO Y DOS SON…**

Típico problema de asignar valores numéricos a letras, que admite varias estrategias de ensayo-error

```
   6 2 3
   6 2 3
   6 2 3
+  6 2 3
-------------
  2 4 9 2
```

Nota: hay otras soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – ESCALERA NUMÉRICA**

a) Para obtener el valor que se encuentra en el peldaño vigésimo obtendremos en primer lugar una expresión para la base, cuya sucesión de términos es: 2, 4, 8, 14, 22, ... Si escribimos estos términos con sus diferencias tenemos:

$$2 \overset{2}{--} 4 \overset{4}{--} 8 \overset{6}{--} 14 \overset{8}{--} 22 \ldots$$

Así, podemos observar como, a partir de la sucesión de diferencias podemos construir los términos de modo que:

$a_1 = 2$
$a_2 = 2 + 2.1$
$a_3 = 2 + 2.1 + 2.2$
$a_4 = 2 + 2.1 + 2.2 + 2.3$
$a_5 = 2 + 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4$
.....
$a_n = 2 + 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + ... + 2.(n-1)$

así:

$$a_n = 2 + 2.(1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1)) = 2 + 2.\frac{1+n-1}{2}.(n-1) = 2 + n.(n-1)$$

Por lo tanto, $a_n = n^2 - n + 2$, y la base del escalón vigésimo corresponderá a

$$a_{20} = 20^2 - 20 + 2 = 382.$$

Tengamos en cuenta ahora que dado a_n, el término que ocupa la parte superior de la columna anterior será $a_n - 2$, luego, el número que ocupará el peldaño de la columna n-sima será:

$$\text{peldaño}(n) = a_{n+1} - 2 = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n = n.(n+1)$$

En consecuencia, peldaño(20) = 20.21 = 420

b) En primer lugar vamos a buscar la base de la columna que contiene al número 2006, para ello debemos encontrar un valor *n* tal que:

$$2 + n.(n-1) \le 2006 \le 2 + (n+1).n \quad \Rightarrow \quad n^2 - n \le 2006 \le n^2 + n$$

Probando obtenemos que $45^2 - 45 = 1980 \le 2006 \le 2070 = 46^2 - 46$, luego en la base de la columna que contiene a 2006 se encuentra el valor 1980, aumentando ahora de dos en dos, tenemos:

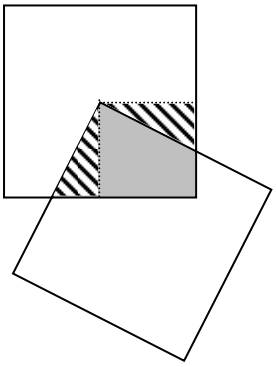
Altura	base	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Valor	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006

por lo tanto, el número 2006 ocupa la altura 13 en la columna 45.

También podríamos haber obtenido el resultado despejando el valor de la altura en la ecuación: $1980 + 2.Altura = 2006$.

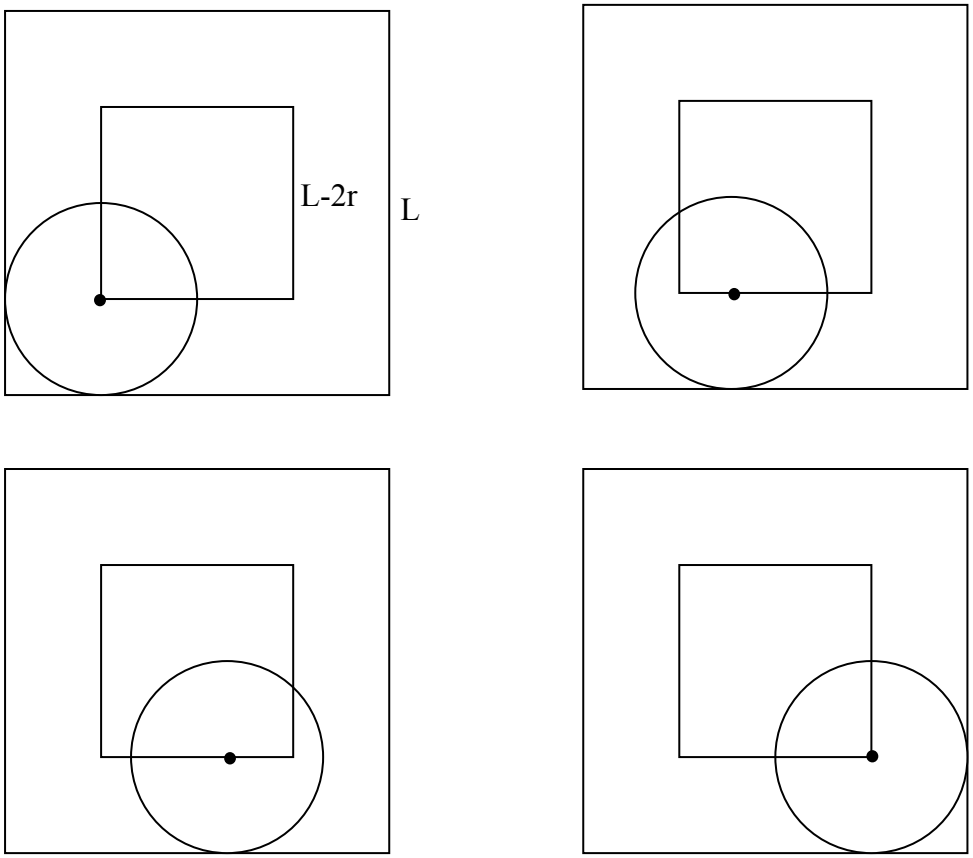
- **Solución - Fase 1 - (12/14) – SUPERPUESTOS**

  Este problema invita a utilizar el cálculo de áreas por triangulación, usando el teorema de Pitágoras, aunque la solución se alcanza de forma gráfica, según la figura siguiente, para concluir que el valor del área de la zona marcada siempre es igual a la cuarta parte del cuadrado.



- **Solución - Fase 2 - (12/14) – RUEDA CUADRADA**

Veamos que ocurre al mover la rueda sobre uno de los lados:



Se ve claramente que el camino recorrido será un cuadrado de lado L-2r, de forma que el recorrido total será **4.(L-2r).**

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – NÚMEROS CURIOSOS**

Nos piden que contemos los números de la forma abc que cumplen que a + b = c.
Veamos las distintas posibilidades según cuál sea la última cifra.
Está claro que la última cifra no puede ser 0 puesto que en este caso el número estaría formado solo por ceros.

Si la última cifra es 1, entonces la única posibilidad (teniendo en cuenta que el número ha de ser de 3 cifras) es el 101.

Si la última cifra es 2, habrá dos posibilidades pues la elección de la primera llevará consigo cuál debe de ser la segunda. Si la primera es 1 la segunda también será 1, y si la primera es 2 la segunda tendrá que ser 0. Entonces tenemos dos números: 112 y 201

Si la última cifra es 3 tendremos tres posibilidades, ya que el 3 puede escribirse como suma de dos números de 3 formas diferentes: 3= 2+1=1+2=3+0 (se descarta 0+3 puesto que en este caso el número constaría solo de 2 cifras).

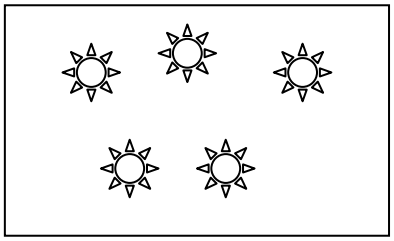
Razonando de manera análoga para los casos en los que la última cifra sea 4, 5, 6, 7, 8 y 9 podemos deducir que en cada caso tendríamos 4, 5, 6, 7, 8 y 9 posibilidades respectivamente. Así que la cantidad de números de tres cifras que tienen la característica indicada en el enunciado es

1+2+3+4+5+6+7+8+9=45

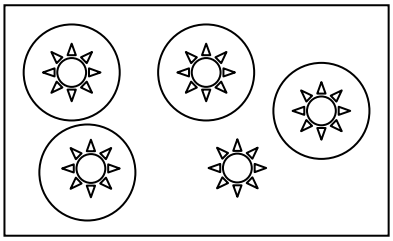
- **Solución - Fase 2 - (12/14) – DULCE REPARTO**

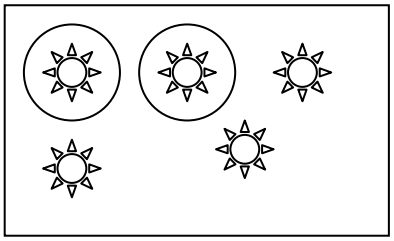
Una manera no demasiado correcta de intentar resolver este problema consiste en razonar de la siguiente forma:
"Si al repartir 2 cajas sobran 4 bombones, es que sobran dos bombones por caja; en consecuencia, al repartir 3 cajas sobrarán 6 bombones. Y como son 6 los amigos, se vuelven a repartir esos 6 bombones sobrantes entre ellos y **no sobra finalmente ninguno**".

Para darse cuenta de que este planteamiento es incorrecto basta imaginar que cada caja tiene, por ejemplo, 5 bombones:

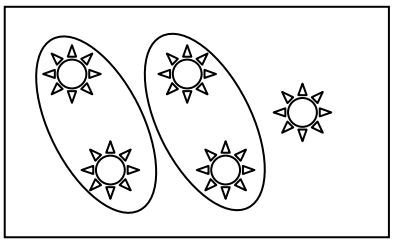


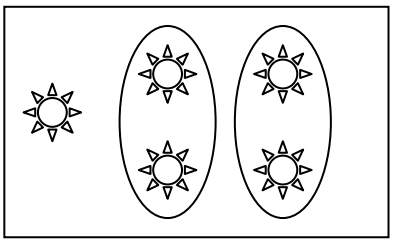
- Cuando repartimos 2 cajas entre los 6 amigos, cada uno recibe un bombón y sobran 4 (tal y como indica el enunciado):

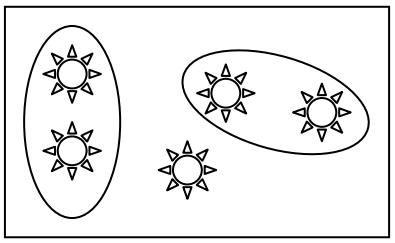




- Sin embargo, cuando repartimos 3 cajas entre los 6 amigos, cada uno recibe dos y sobran 3 bombones, lo cual contradice la *"solución"* comentada inicialmente, que aseguraba que no sobraría ningún bombón al completar el reparto.







Demostraremos que el número de bombones que sobran al final es 0 bombones ó 3 bombones, y depende del número de bombones que contengan las cajas:

Sea ***x*** el número de bombones que contiene cada caja. Dividiendo *2x* entre 6 se obtiene:

$$\begin{array}{l|l} 2x & 6 \\ \hline \underset{\smile}{4} & a \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x = 6a + 4 \quad (a \in \mathbb{N})$$

De aquí se deduce inmediatamente que $x = 3a + 2 \quad (a \in \mathbb{N})$. Es decir, que la caja de bombones que encaja en el enunciado del problema ha de contener un número de bombones perteneciente a la serie aritmética 2, 5, 8, 11, 14, 17,...

a	0	1	2	3	4	5	...
x	2	5	8	11	14	17	...
3x	6	15	24	33	42	51	...
r (*)	0	3	0	3	0	3	...

$$(*) \quad \begin{array}{l|l} 3x & 6 \\ \hline \underset{\smile}{r} & b \end{array} \quad \rightarrow \quad 3x = 6b + r \quad (b \in \mathbb{N}, \ \ 0 \le r < 6)$$

La tabla nos sugiere que el número (***r***) de bombones sobrantes al repartir 3 cajas de bombones (***3x***) entre 6 amigos es 0 (si ***a*** es par) ó 3 (si ***a*** es impar).

Podemos demostrarlo rigurosamente:

Dividimos término a término las relaciones obtenidas anteriormente:

$$\left.\begin{array}{l} 3x = 6b + r \\ x = 3a + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = \frac{6b + r}{3a + 2}$$

Operamos:

$$9a + 6 = 6b + r \Rightarrow r = 9a + 6 - 6b = \dot{3} \text{ (múltiplo de 3)}$$

Como sabemos que $0 \le r < 6$ y acabamos de demostrar que r es múltiplo de 3, **r vale necesariamente 0 ó 3**.

Demostraremos ahora que el valor de **r** (0 ó 3) depende de que el contenido de las cajas de bombones (***x***) sea un término par o impar de la serie 2, 5, 8, 11, 14, 17,...

- Sea $a = 2k \ \ (k \in \mathbb{N})$. Entonces:

  $$r = 9 \cdot 2k + 6 - 6b = 18k + 6 - 6b = \dot{6} \text{ (múltiplo de 6).}$$

  Y el único múltiplo de 6 menor que 6 es $r = 0$ (recordemos que $0 \le r < 6$).

- Sea $a = 2k + 1 \ \ (k \in \mathbb{N})$. Entonces:

  $$r = 9 \cdot (2k + 1) + 6 - 6b = 18k + 9 + 6 - 6b = 18k + 6 + 3 + 6 - 6b = 3 + \dot{6}$$

  Y, de nuevo, la condición $0 \le r < 6$ implica que el múltiplo de 6 ha de ser 0, por lo cual r será $r = 3 + 0 = 3$.

- **Solución - Fase Final - (12/14) – EL REBAÑO**

Llamemos n al número de ovejas del rebaño. Se cumple por el enunciado del problema que

$$\left.\begin{array}{l} \text{n – 1 es múltiplo de 2} \\ \text{n – 1 es múltiplo de 3} \\ \text{n – 1 es múltiplo de 4} \\ \text{n – 1 es múltiplo de 5} \\ \text{n – 1 es múltiplo de 6} \end{array}\right\} \quad \textbf{n -1} \text{ es múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6}$$

Calculemos los múltiplos que cumplen esta condición m. c. m. (2,3,4,5,6) = 60

luego n – 1 puede ser, 60, 120, 180, 240, 300, 360, ...

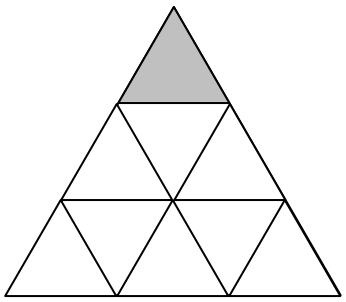
y por tanto n puede ser 61, 121, 181, 241, 301, 361, ...

Como por otro lado n debe ser múltiplo de 7, busquemos cuál o cuáles de los valores anteriores cumplen esta condición
61 no es múltiplo de 7
121 no es múltiplo de 7
181 no es múltiplo de 7
241 no es múltiplo de 7
301 SI es múltiplo de 7
361 no es múltiplo de 7

Luego el rebaño tenía 301 ovejas exactamente

- **Solución - Fase Final - (12/14) – CORTANDO TRIÁNGULOS**

Completando el dibujo tenemos la figura siguiente:



llamemos *t* al valor del área del pequeño triángulo marcado en la figura. Entonces tenemos:

Área_Triángulo = 9.*t*
Área_Hexágono = 6.*t*

El área del triángulo es múltiplo de 11, en consecuencia *t* debe ser múltiplo de 11, podemos tomar *t*= 11.*k*, de donde:

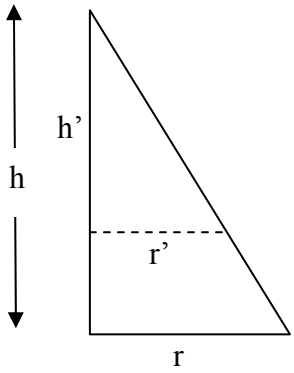
Área_Hexágono = 6.11.*k* = 66.*k*

Luego, efectivamente el área del hexágono será múltiplo de 3 y dando valores obtenemos las relaciones de la tabla:

	1	2	3	4	5	.....	*k*	.....
área del triángulo	99	198	297	396	495	.....	99.*k*	.....
área del hexágono	66	132	198	264	330	.....	66.*k*	.....

- **Solución - Fase Final - (12/14) – CHIN-CHIN ARQUÍMEDES**

Para calcular la altura a la que debería llenarse la copa para que tomase la mitad de su volumen tomemos una sección vertical de la figura anterior, obtenemos entonces la figura que vemos en la imagen, y de la que, por semejanza de triángulos, obtenemos:



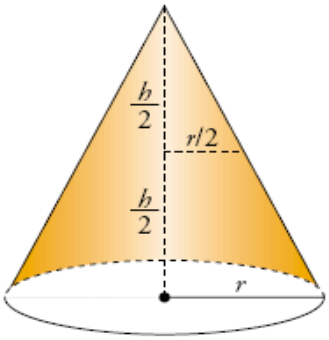
$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = H$$

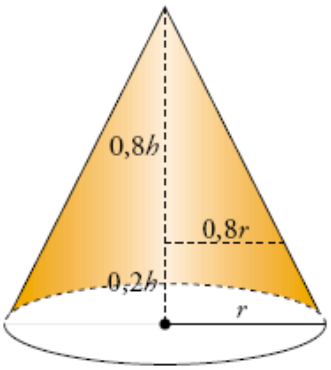
En consecuencia, a partir de la igualdad:

$$V_{cono\ grande} = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{2}{3}\pi.r'^2.h' = V_{cono\ pequeño}$$

tenemos que $H^3 = \frac{1}{2}$, de donde se obtiene que $H = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}7937$.

Luego la relación entre alturas buscada será: $h' = 0{,}7937.h$, es decir, que debemos llenar la copa, más o menos a una altura del 80% (79,37%) de la altura original.





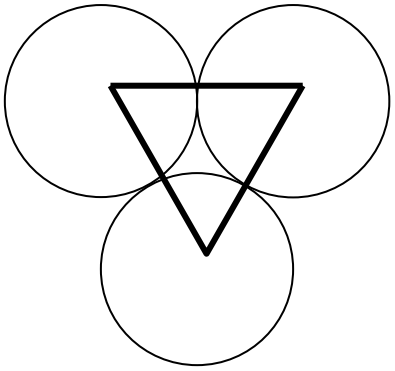
- **Solución - Fase 1 - (14/16) – ¿JUEGA MOZART A LOS DADOS?**

Como hay 11 resultados posibles al lanzar dos dados (del 2 al 12) y el vals está compuesto por 16 compases, podemos elegir 11 para el primero, 11 para el segundo…y así hasta el decimosexto siendo el resultado:
11^{16} (casi 46 mil billones) formas no equiprobables correspondientes a dos dados
Este número es tan grande que se estima que si se interpretaran continuamente y con un orden sistemático, todas las partituras posibles; y cada interpretación tardara 30 segundos, entonces para agotar todas las posibilidades, se excederían 728 millones de años, interpretando la obra de día y de noche y de manera continua.
Dicho lo anterior es importante mencionar que no todas las realizaciones para la suma de dos dados, son igualmente probables. La distribución probabilística para la suma de las caras de dos dados lanzados al azar, se deduce haciendo la observación de que la suma = 2 sólo cuando en ambas caras aparece el número 1, esto es: (1,1) y la suma = 3 cuando: (1, 2) o bien (2, 1), y así las demás, como la suma = 9 cuando: (3, 6) o (4, 5) o (5, 4) o (6, 3)
Si como se dijo anteriormente, cada 30 segundos se interpreta una realización del Juego de Dados pero siguiendo al pie de la letra la selección aleatoria, la realización más probable que se ha mencionado, ocurriría "en promedio" cada 44,728 años. Haciendo un cálculo similar, una de las menos probables, por ejemplo (2, 2, 2, ..., 2), ocurriría "en promedio" cada 126,184 billones de años, . Por ello no creo que sea una exageración el que cada vez que se anuncia que se interpretará el Juego de Dados, se presume como Estreno Mundial
Puedes encontrar más información en la página:

http://www.anarkasis.com/pitagoras/100_composicion_combinacion/

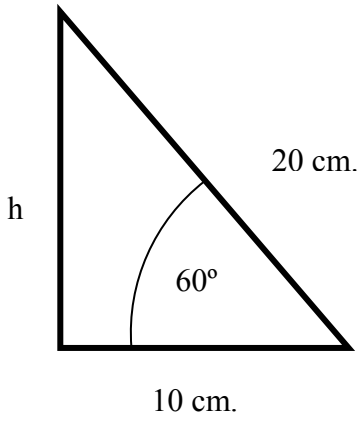
- **Solución - Fase 1 - (14/16) – TRIÁNGULO CIRCULAR**

Si unimos los centros de las circunferencias obtenemos un triángulo equilátero de lado 20 cm.



El área de este sería $A = \frac{b.h}{2}$. La base **b** sería 20 cm, mientras que la altura, aplicando la definición de tangente sería h= tg 60º.10 = 10√3 cm por lo que el área de este triángulo A=100√3 cm^2

En este triángulo equilátero se insertan tres sectores circulares de 60º, o lo que es lo mismo media circunferencia (3x 60º = 180º), de área $A = \frac{\pi.r^2}{2} = 50\pi\, cm^2$.



La superficie del triángulo circular será por tanto la diferencia entre el triángulo equilátero y la de los tres sectores circulares.

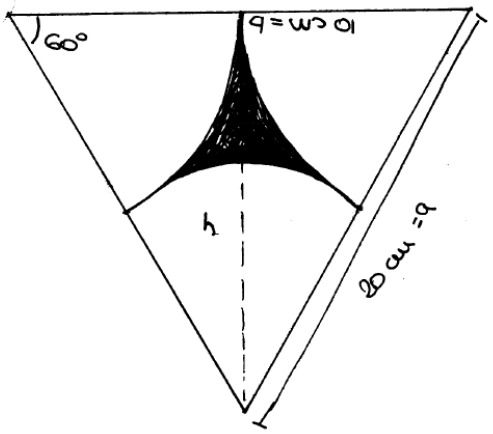
A=100√3-50π cm^2 si queremos dar un resultado aproximado
A≈16,13 cm^2

Solución de Marta Mª Tébar Ruiz de 4º ESO

Marta Mª Tébar Ruiz 4ºA

Olimpiada Matemática ~

TRIÁNGULO CIRCULAR



Las partes no coloreadas del triángulo equivalen a medios círculo

$$\Delta.\text{parte no coloreada} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{100\pi}{2} = 50\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20\sqrt{300}}{2} = 10\sqrt{300} \text{ cm}^2$$

$$a^2 = b^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - b^2 \;/\; h = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \text{ cm}$$

Área de la parte coloreada.

$$\Delta_c = \Delta.\text{triángulo} - \Delta.\tfrac{1}{2}\text{ círculo} = 10\sqrt{300} - 50\pi \simeq \boxed{18'125 \text{ cm}^2}$$

XVII OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – LACIFRA DE LAS UNIDADES**

Veamos una por una qué sucede con las primeras potencias de los distintos sumandos.

Comenzamos con las potencias de 2 pues ya sabemos que $1^{2006}=1$:

$$2^0=1,\ 2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64\ldots$$

Ya no es necesario que continuemos pues observamos que la cifra de las unidades de las potencias de 2 sigue la serie 1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, … , repitiéndose sucesivamente los números: 2, 4, 6, 8. Así que para conocer la cifra de las unidades de 2^{2006} basta con que dividamos 2006 por 4 y como el resto de la división es 2 podemos afirmar que la cifra de las unidades de 2^{2006} será la misma que la de 2^2 , osea, 4.

Veamos ahora lo que sucede con las potencias de 3:

$$3^0=1,\ 3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243\ldots$$

Observamos que la cifra de las unidades de estas potencias sigue la serie: 1, 3, 9, 7, 1, 3, … Así que, del mismo modo que para las potencias de 2, la cifra de las unidades de **3^{2006} coincide con la cifra de las unidades de $3^2=9$.**

Por últimos analizamos las potencias de 4:

$$4^0=1,\ 4^1=4,\ 4^2=16,\ 4^3=64,\ 4^4=256,\ \ldots$$

Vemos que la cifra de las unidades de estas potencias sigue la serie 1, 4, 6, 4, 6… así que, como el resto de la división de 2006 entre 2 es 0, la cifra de las unidades de 4^{2006} es la misma que la de 4^2, o sea, 6.

Así que, como al sumar los resultados obtenidos, **1 + 4 + 9 + 6, da 20**, la cifra de las unidades de la suma indicada en el enunciado del problema será **0**

Solución de Jorge J .Rodríguez García 4º ESO

La cifra de las unidades

En primer lugar, $1^{2006}=1$.

Analicemos los resultados de la cifra de las unidades en 2^x, 3^x y 4^x.

	2^x	3^x	4^x
$x=1$	2	3	4
$x=2$	4	9	...6
$x=3$	8	...7	...4
$x=4$	...6	...1	...6
$x=5$	...2	...3	...4

Caso de 2^x: al dividir x entre 4, si el resto es 1, acabará en 2; si es 2, acabará e 4; si es 3, acabará en 8 y si es exacto, en 6, ya que la cifra de las unidades se comporta de forma cíclica, porque se multiplica siempre por el mismo núme

Pruebas: $1 \,|\, 4$, 1, 0 → acabará en $2, 2^1$. $2 \,|\, 4$, 2, 0 → 2^2 acabará en 4. $2006 \,|\, 4$, 006, 501, 2 → 2^{2006} acabará en 4.

Caso de 3^x: aquí debemos dividir x entre 4 (nº de cifras del ciclo).

$\frac{x}{4}=y+\frac{1}{4}$ → acabará en 3 $\qquad$ $\frac{x}{4}=y+\frac{2}{4}$ → acabará en 9

y = cociente / $\in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\frac{x}{4}=y+\frac{3}{4}$ → acabará en 7 $\qquad$ $\frac{x}{4}=y$ → acabará en 1

$2006 \,|\, 4$, 006, 501, 2 → 3^{2006} acabará en 9.

Caso de 4^x: aquí, el divisor (nº de cifras del ciclo) será 2.

$\frac{x}{2}=y+\frac{1}{2}$ → acabará en 4 $\qquad$ $\frac{x}{2}=y$ → acabará en 6 $\qquad$ y = cociente / $\in \mathbb{N}$

$2006 \,|\, 2$, 0006, 1003, 0 → 4^{2006} acabará en 6.

$1+4+9+6=20$, por lo que $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}$ acabará en 0.

XVII OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – ESFERAS**

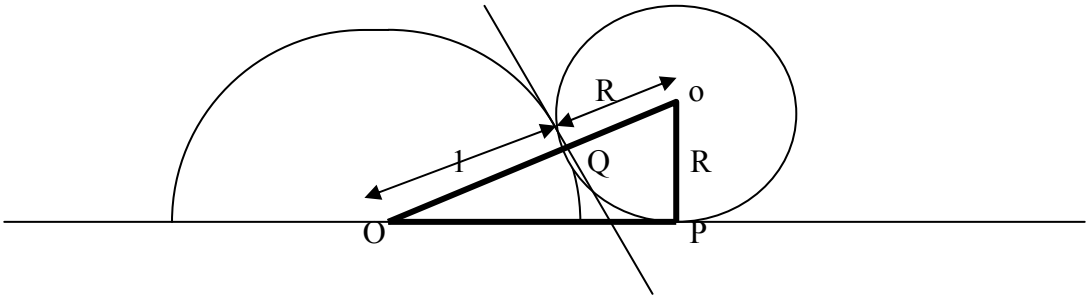
Consideremos la Semiesfera y una Esfera tangente cualquiera, y denominamos:

O al centro de la base de la semiesfera.

o al centro de la esfera tangente.

P al punto de tangencia de la esfera con el tablero.

Q al punto de tangencia de las dos esferas.

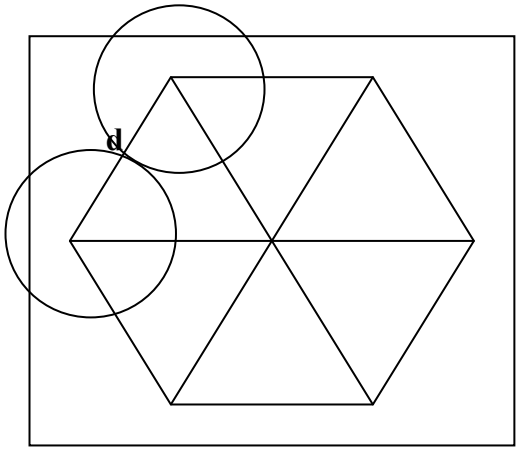


Si imaginamos el triángulo rectángulo, de vértices O, P y o, que por ser ambas esferas tangentes, pasará por Q. Y podemos obtener la relación Pitagórica:

$$(1+R)^2 - R^2 = d^2; \quad \text{d = OP.}$$

Es decir: $d = \sqrt{2R+1}$

Por otra parte, si denominamos P_1, P_2,…, P_6, a los seis puntos de contacto de las esferas con el tablero, y imaginamos dichos puntos unidos con segmentos, obtendremos un hexágono regular de centro O, y de lado d = OP. y que además, por ser las esferas tangentes será d = 2 R



Es decir, se cumplirá la ecuación: $2R = \sqrt{2R+1}$

Cuya ecuación es equivalente a:

$$4R^2 - 2R - 1 = 0.$$

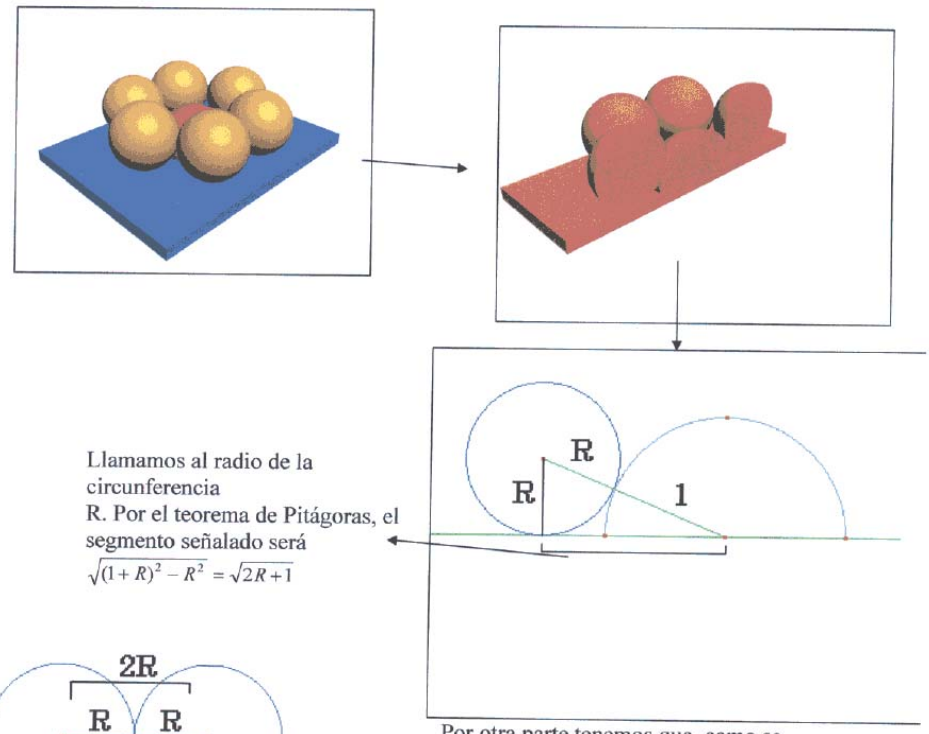
Que resolviendo la ecuación de segundo grado en R, obtenemos los valores:

$$R = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \qquad \text{Cuyo único valor positivo es } R = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$$

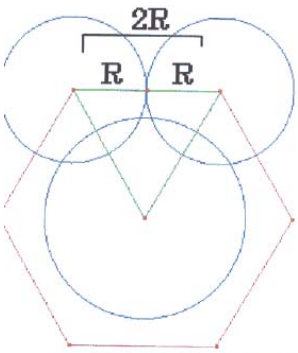
Solución de Adrián Barriuso 4º ESO

PROBLEMA 4º

Al cortar transversalmente la figura del problema, se vería lo siguiente:



Llamamos al radio de la circunferencia R. Por el teorema de Pitágoras, el segmento señalado será $\sqrt{(1+R)^2 - R^2} = \sqrt{2R+1}$



Por otra parte tenemos que, como se muestra en la figura, el lado de ese triángulo, además de ser $\sqrt{2R+1}$, también es 2R. Por ello ya tenemos la ecuación $\sqrt{2R+1}$=2R. Se soluciona:

$$2R+1=4R^2 \qquad 4R^2-2R-1=0$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$$

Sólo consideramos el valor positivo de la raíz cuadrada porque con el valor negativo de ésta da una distancia negativa. VALOR DEL RADIO=$\frac{\Phi}{2}$

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – VIAJE EN EL TIEMPO**

Como las dos naves van a la misma velocidad se encontrarán en la mitad del camino, a los diez millones de kilómetros. Habrán invertido veinte días.
Como el cohete viaja a una velocidad de un millón de kilómetros/día y se supone que no para hasta el encuentro recorrerá veinte millones de kilómetros
Se cuenta que una versión de este problema se le planteó en un cóctel al matemático húngaro Janos Von Neumann, quien tras pensar un instante, dio la respuesta correcta.
La persona que le planteó el problema se asombró por la prontitud de la respuesta, comentándole que todos los matemáticos a los que había planteado el problema lo habían resuelto pasando por alto la forma más simple de resolverlo, invirtiendo un largo rato, mediante una complicada suma de una serie infinita..
Von Neumann se sorprendió y dijo: "Pero si así lo resolví yo"

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – LEY ANTI-TABACO**

Las mujeres fuman 10 cigarrillos mientras que los hombres fuman 22 cigarrillos.

Si construyo la siguiente tabla:

Nombre	*Mariana 1*	*Isabel 2*	*Diana 3*	*Inma 4*
Simón igual	**1**	**2**	**3**	**4**
Pedro el doble	**2**	**4**	**6**	**8**
Agustín el triple	**3**	**6**	**9**	**12**
Carlos el cuádruplo	**4**	**8**	**12**	**16**

La única combinación posible que sume 22 cigarrillos es la sombreada por lo que el marido de Mariana es Agustín.

P.D. Fumar perjudica tu salud y la de los que te rodean

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – CARNAVAL MATEMÁTICO**

Demostremos en primer término la equivalencia de la primera figura. El triángulo de la barba es rectángulo isósceles, con base: $2r = r'\sqrt{2}$
Área del sector circular plano o semicírculo de radio r: $\pi r^2/2$
Área del sector circular derecho o "cuarto de semicírculo" de radio r': $\pi (r'^2)/4 = \pi(r\sqrt{2})^2/4 = \pi r^2/2$
Estos dos sectores circulares son ya equivalentes.

Las dos áreas pilosas se pueden obtener restando a las de los sectores anteriores el área del mismo segmento circular que contiene los ojos. Es decir la cabellera ocupa la misma superficie que la barba en la primera máscara.
El área común a los dos elementos equivalentes es la más "sencilla" de las dos, el triángulo rectángulo isósceles, que se expresa por $r^2 = (r'^2)/2$

Pasemos ahora a la equivalencia contenida en la segunda figura. Según el estudio anterior, cada lúnula simple, derecha o izquierda, es equivalente al triángulo rectángulo isósceles que lleva el ojo del mismo lado. Por consiguiente, la doble lúnula es equivalente al triángulo rectángulo isósceles que contiene los dos ojos. El área del triángulo, o de la doble lúnula es igual a : r'^2. Por otra parte, el área del cuadrado de la barba es $r'(r'/2 + r'/2) = r'^2$.
De ahí resulta por un lado que la barba ocupa el mismo lugar que la cabellera, y por el otro que los cuatro elementos sombreados de las dos figuras son todos equivalentes entre sí.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – PAPIRO DE AHMES**

Como se puede ver se trata de una progresión aritmética.
Si llamo **x** al primer término $\mathbf{a_1}$ e **y** a la diferencia **d**
Entonces al primero le corresponde $\mathbf{a_1 = x}$
$\mathbf{a_2 = x+y}$
$\mathbf{a_3 = x+2y}$
$\mathbf{a_4 = x+3y}$
$\mathbf{a_5 = x+4y}$
Con las premisas del problema establecemos dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+(x+4y)}{2}.5 = 100 \\ 7[x+(x+y)] = (x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \end{array}\right\} \text{Que simplificando}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y = 20 \\ 11x = 2y \end{array}\right\}$$

Al resolver el sistema resultan $x = \dfrac{5}{3}; y = \dfrac{55}{6}$

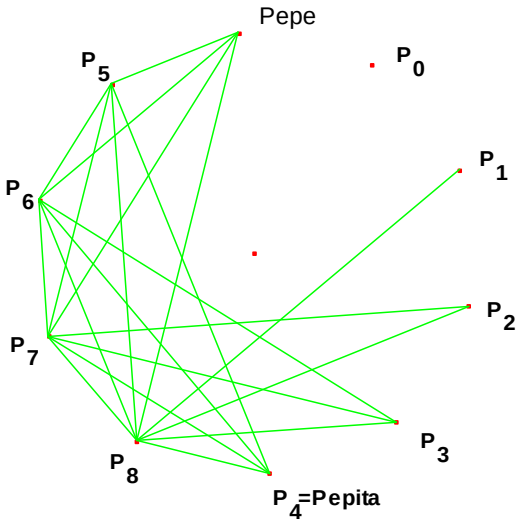
- **Solución - Fase 2 - (14/16) – HOLA DON PEPITO**

Supongo que los saludos son recíprocos, es decir que si A saluda a B, B saluda a A.

Por a) y b) el número de personas a las que puede saludar una cualquiera esta entre 0 y 8. Como Pepe recibe 9 respuestas distintas, alguien no saludo a nadie, otro a 1 sola persona,.. hasta 8.

Llamemos Pi a la persona que saluda a otras i.

Como P0 no saluda a nadie, P8 tiene que ser su cónyuge de P0, de otra manera no podría saludar a 8 personas.
P1 tiene que saludar a P8 y a nadie más. Por tanto P7 tiene que ser su cónyuge.
P2 debe saludar entonces a P8 y P7, y a nadie más. P6 tiene que ser su cónyuge.
P3 debe saludar entonces a P8, P7 y P6, y a nadie más. P5 tiene que ser su cónyuge.
Sólo quedan desparejados Pepe y P4. Luego P4 es la mujer de Pepe, es decir, Pepita saludó a 4 personas.



Los matrimonios se encuentran diametralmente opuestos

- **Solución - Fase Final - (14/16) – DADOS Y FRACCIONES**

Primero vamos a determinar el conjunto de todos los casos posibles (Espacio muestral).

E = {1/1, 1/2 **(doble)** , 1/3**d**, 1/4**d**, 1/5**d**, 1/6,**d** 2/2, 2/3**d**, 2/4**d**, 2/5**d**, 2/6**d**, 3/3, 3/4**d**, 3/5**d**, 3/6**d**, 4/4, 4/5**d**, 4/6**d**, 5/5, 5/6**d**, 6/6} } 36 casos posibles

Contemos los casos en que se formaría una fracción reducible

{ 2/2, 2/4, 2/6, 3/3, 3/6, 4/4, 4/6, 5/5, 6/6 } → 13 casos probables (recuerda los que son doble)

Los casos en que se formaría una fracción irreducible: 36 – 13 = 23 casos posibles

Calculemos la probabilidad de obtener cada tipo de fracciones:

P (fracción reducible) = 13/36 = 0,3611 = 36,11 %
P (fracción irreducible) = 23/36 = 0,6388 = 63,88 %

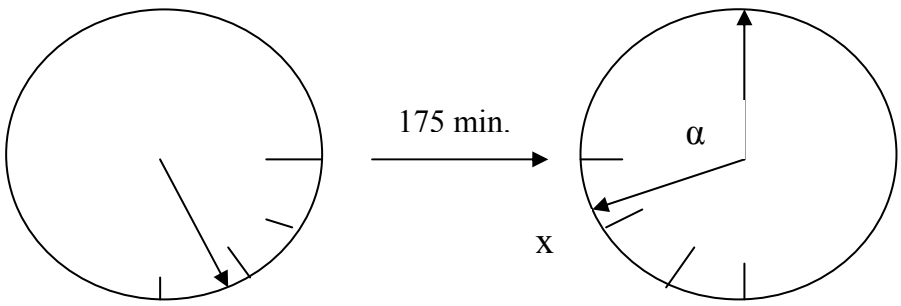
Solución: Tiene más posibilidades de acertar Pepe que apostó porque la fracción sería irreducible.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – EL RELOJ QUE ATRASA**

Cada 120 min atrasa 15 minutos.
A partir de las 5 h. 15 min, transcurren 3 h. 20 min = 200 min. De tiempo real.
Si en 120 min. Atrasa 15 min., en 200 min. Atrasará 25 min.

El reloj que atrasa no recorre 200 min., sino 200 -25 = 175 min.

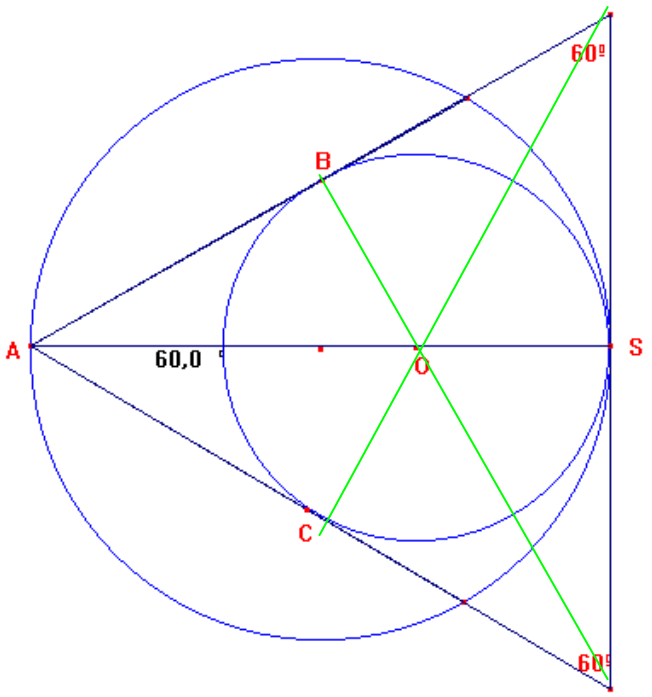
Posición de la aguja horaria



x es el ángulo que recorre el horario en 10 min.
Si en 60 min recorre 30 º, en 10 min. Recorrerá 5º.
El ángulo pedido valdrá 90º + 25º = 115 º

- **Solución - Fase Final - (14/16) – CÍRCULOS Y TANGENCIAS**

El círculo pequeño está inscrito en un triángulo equilátero. La mediana AS, es bisectriz del ángulo y mide 2R (*"siendo R el radio de la circunferencia grande"*). El punto de intersección de las medianas en cualquier triángulo se encuentra a una tercera parte de la base.



Así, si denominamos r al radio del círculo pequeño se cumple:

$$\frac{OS}{AS}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{r}{2R}=\frac{1}{3}\Rightarrow r=\frac{2R}{3}$$

Luego, si A_C = 1 m² es el área del círculo grande, y a_C el área del círculo pequeño, se cumplirá:

$$a_C=\pi r^2=\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\left(\pi R^2\right)=\frac{4}{9}\left(1m^2\right)=\frac{4}{9}m^2$$

FOTOGRAFÍA Y MATEMÁTICAS

(Fotografías realizadas por los alumnos finalistas en Minaya)

CUBO AL CUADRADO

FIBONACCI 1,1,2…

***π* SACA AGUA**

PITÁGORAS CUBRE LAS CASAS

PROGRESIÓN MINAYENSE

PUERTA HACIA LA SIMETRÍA

RAIZ CÚBICA

VISIÓN EN ESPIRAL