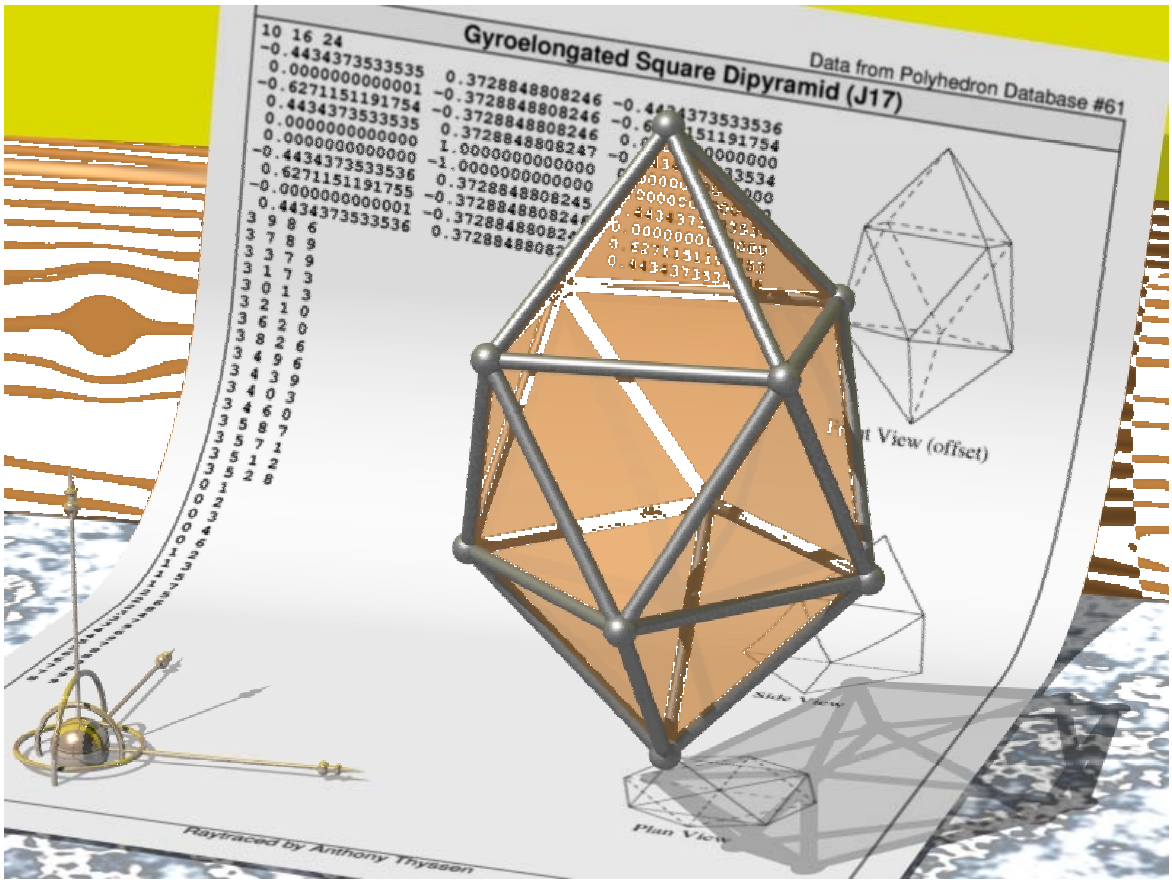
XVI OLIMPIADA MATEMÁTICA



Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
S.C.M.P.M.

ISBN 84-689-3955-2
Depósito legal Albacete 601-2005

LOS AUTORES
Antonio Bueno Aroca
Bernardino Del Campo López
Jesús García Segovia
Juan Emilio García Jiménez
Juan Martínez-Tébar Giménez
Juan Pablo Martínez Corchano
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete.

También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI.

Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes "resolutores", el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

La Olimpiada de este año 2005 está plagada de celebraciones:

El acontecimiento más cercano a nosotros como castellano-manchegos, es la conmemoración del IV centenario de la publicación de la primera parte del Quijote.

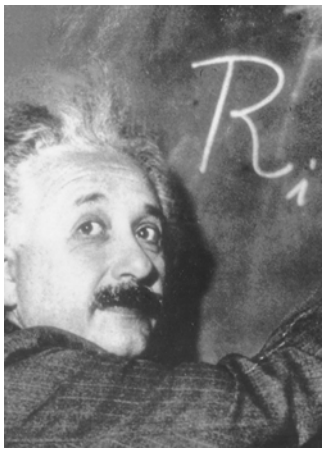
Considerada por muchos la obra cumbre de la literatura universal, recoge en sus páginas, como no, la obra cumbre del pensamiento humano, las Matemáticas.

Supongo que muchos de vosotros habréis trabajado el cuadernillo, que para la ocasión ha elaborado la Federación de Profesores de Matemáticas, siendo uno de los autores nuestro querido compañero Juan Emilio García Jiménez.

En él se recogen citas, y actividades relacionadas con esta gran obra, que ya en el siglo XVII reconoce la gran importancia que las Matemáticas tienen en la formación de una persona, sea cual sea su ocupación, hasta la de caballero.

En el capítulo XVIII s.p., cuando Lorenzo, un joven aspirante a poeta pregunta a D. Quijote por la ciencia de la caballería, éste le explica las cosas que ha de ser y ha de saber un caballero andante:

"*Es una ciencia –replicó D. Quijote- que encierra en sí todas o las más ciencias del mundo, a causa que el que la profesa ha de ser jurisperito y saber las leyes de la justicia distributiva y conmutativa […] ha de ser teólogo […] ha de ser médico […], ha de ser astrólogo, para conocer por las estrellas cuantas horas son pasadas de la noche, y en que parte y en que clima del mundo se halla, ha de saber las Matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad dellas*".
Y al igual que hoy en día, se utilizaban para razonar y dar tintes de veracidad a las cosas.
En el capítulo XIX s.p.
"En lo que faltaba de camino les fue contando el licenciado las excelencias de la espada con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones matemáticas, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia"
Y también recoge medidas tradicionales de nuestra tierra como la arroba, la fanega, el celemín etc.
Habla de la geometría; de la astronomía, disciplina que en estos siglos formaba parte del quehacer matemático; de las paradojas, es el célebre pasaje del capítulo XLV s.p. en el que Sancho es gobernador de la Ínsula Barataria…
Desde aquí os animo a todos a seguir descubriendo todos los matices, matemáticos o de otra índole, que se encuentran en esta inmortal obra.



No quisiera olvidarme de otro Quijote más cercano a los matemáticos, Albert Einstein, ya que el 18 de abril se cumplió el 50 aniversario de su muerte, y también se recuerda este año 2005, año mundial de la Física, el centenario de la publicación de la teoría de la relatividad.
Einstein era un niño retraído y tímido, con dificultades en el lenguaje y lento para aprender en sus primeros años escolares. Era, sin embargo un apasionado de las ecuaciones, cuyo aprendizaje inicial se lo debió a un tío suyo. Viajó en su juventud a Italia, donde tuvo la oportunidad de conocer su gran tradición cultural y estudiaba por su cuenta. Fue durante este periodo cuando empezó a contemplar los efectos del movimiento a la velocidad de la luz, un rompecabezas cuya resolución cambiaría para siempre la física y la cosmología
Los primeros años de su vida adulta transcurren en la oficina de patentes de Berna, donde escamoteando horas a su trabajo desarrolló y maduró su teoría, donde excluye la noción de espacios y tiempos absolutos. Empezó a publicar los resultados de sus investigaciones en uno de los principales diarios científicos, y focalizó sus intuitivos análisis sobre las implicaciones de la cuestión que lo había intrigado años antes: ¿Cómo sería cabalgar en un rayo de luz?
A la temprana edad de veintiséis años, Einstein publicó cuatro trabajos científicos. Sin duda el trabajo más importante fue el titulado «*Acerca de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*», donde expone la relatividad especial. En él plantea dos postulados que tienen inmensas consecuencias:

- Todos los observadores que se mueven entre sí con velocidad constante son equivalentes en lo que a las leyes de la física se refiere. Este es el principio de relatividad que excluye la noción de espacios y tiempos absolutos.

- La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, 299.792 kilómetros por segundo, y es independiente del movimiento relativo entre la fuente de luz y el observador. En esos primeros años Einstein plantea su famosa relación $E = m\ c^2$, el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad de la luz dan la energía asociada a una masa m. Masa y energía son dos formas equivalentes. Esto produjo una revolución en nuestra comprensión de la física del Sol y las estrellas y constituye la base de la energía nuclear.

En 1916, dio a conocer su teoría general de la relatividad, en un periodo pleno de vivacidad y alegría. Escribió a uno de sus amigos: "En el curso de este último mes he vencido el periodo más excitante de mi vida y el más fructífero". En la relatividad general, geometriza la gravitación. Una masa deforma el espacio-tiempo a su alrededor y Einstein proporciona las matemáticas que permiten calcular punto a punto la "geometría" en la vecindad de una masa.
Pese a ser de una concepción eminentemente de base matemática abstracta, la relatividad general tenía un gran número de aplicaciones concretas.

Lo más importante, desde nuestro punto de vista es que antes de 1905 la ciencia podía ilustrar casi siempre sus descubrimientos, por muy abstrusos que fuesen, por medio de modelos mecánicos ya partir de 1905 los modelos serán matemáticos.

Einstein fue un científico genial y con la misma intuición física y matemática de Newton, pero con un carácter simpático; un visionario como Kepler, pero que siempre supo mantenerse aterrizado sobre la Tierra. Recibió en vida, al igual que Newton, todos los honores y el respeto que un genio tan excepcional merece

También en este año ,organizadas por la SCMPM , va a tener lugar en nuestra ciudad las XII JAEM donde esperamos la venida de cientos de profesores de matemáticas para debatir, compartir experiencias, aprender y mejorar nuestra labor docente.
El propio Einstein dijo en una ocasión: *"Soy en verdad un viajero solitario, y los valores que han iluminado mi camino y han proporcionado una y otra vez nuevo valor para afrontar la vida han sido la belleza la bondad y la verdad"*
Haciendo nuestros estos valores, no queremos que el viaje lo hagáis solos así que debemos estar preparados para la gran diversidad de inquietudes y necesidades que, cada vez más, los alumnos presentáis.
No queremos que ningún alumno se pierda o aburra en nuestras aulas, nuestros esfuerzos deben estar encaminados para guiarle y acompañarle en el aprendizaje y descubrimiento de una materia bonita, apasionante e imprescindible para conocer el mundo que nos rodea.

Todos los que aquí nos encontramos, tenemos la ilusión y arrojo de don Quijote por un lado y en la cordura y sensatez de Sancho por otro; nuestra Dulcinea es las Matemáticas y nuestras aventuras se desarrollan por las llanuras de la resolución de problemas.

Esta edición los finalistas han sido:

Ciclo 12-14

Antonio Cebrián García
Carlos Fernández Escobar
Altea Garrido Lafuente
Luís J. González Martín
Borja López Arenas
Víctor J. López Madrona
Consuelo Parreño Torres
David Serrano Ferriz
Blanca serrano Serrano
David Tortosa Collado

Ciclo 14-16

Carmen Mª Belmar Martínez
Pedro Ciller Cutillas
María del Campo Giménez
Antonio J. Díaz Honrubia
César Enriquez Fuentes
José L. Fernández Moreno
Juan C. Puñal Torres
Fabio Simón Gabaldón
Daniel Tomás Martínez
Mario Viñas Gil

XVI Olimpiada Provincial de Albacete

Nivel 12/14

Primera Fase

Problema 1. LAS BODAS DE CAMACHO
Problema 2. TRIÁNGULO DE DISCOS
Problema 3. LA MÁQUINA FRACCIONARIA
Problema 4. EL CUADRADO PLUSCUAMPERFECTO
Problema 5. DOBLECES
Problema 6 PARTIDAS DE AJEDREZ

Segunda Fase

Problema 1. NÚMEROS PRIMOS
Problema 2. MUCHAS CIFRAS
Problema 3. LA ESCALERA

Fase Final

Problema 1. CASO REDONDO
Problema 2 EN UN CUADRADO
Problema 3. MÁS O MENOS

Nivel 14/16

Primera Fase

Problema 1. LAS OFERTAS
Problema 2. LA DESPEDIDA
Problema 3. OCEAN´S ELEVEN
Problema 4. EL FUERTE CONVEXO
Problema 5. CUATRO NÚMEROS SEGUIDOS
Problema 6. EL CORRAL DE RUCIOS

Segunda Fase

Problema 1. UN NÚMERO ENORME
Problema 2. EL CUCHILLO DEL ZAPATERO
Problema 3. MAS CORRALES PARA RUCIO

Fase Final

Problema 1. TORNEO DE AJEDREZ
Problema 2. MULTIRRECTÁNGULO
Problema 3.DIVIDIR UN TRIÁNGULO

Soluciones

XVI Olimpiada

Villamalea 2005

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. LAS BODAS DE CAMACHO

Estamos, como ya sabéis, en el año del IV Centenario de la publicación de El Quijote. En la segunda parte, capítulos XX y XXI, se relatan las bodas de Camacho con Quiteria.

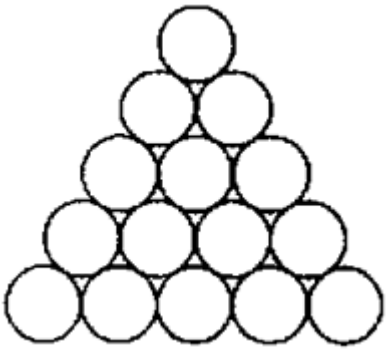
Al pasar los años, en un aniversario de estas bodas Quiteria le dice a Camacho: "He estado casada contigo tres quintas partes de mi vida, mientras tu solamente llevas casado la mitad de tu existencia". "Eso es obvio", responde Camacho, "porque yo te llevo diez años"

¿Qué edades tenían al casarse? ¿Cuánto tiempo llevan casados?

F.1 (12/14) Problema 2. TRIANGULO DE DISCOS

Colocamos 15 discos según el diagrama de la figura. Sabiendo que el radio de cada disco es de 2 cm.

¿Qué longitud tiene el perímetro exterior de la figura?



F.1 (12/14) Problema 3. LA MAQUINA FRACCIONARIA

Una máquina "trituradora de fracciones" hace lo siguiente:

Si una fracción F entra en ella, la procesa y sale una nueva fracción $\frac{1-F}{1+F}$.

Así por ejemplo, si entra 1 /2 sale convertido en 1/3. Pues bien, si entra 2/3 y la fracción que sale se mete otra vez y ésta se sigue procesando hasta completar 1000 procesos en total.

¿Cuál será la fracción que saldrá finalmente?

F.1 (12/14) Problema 4. EL CUADRADO PLUSCUAMPERFECTO

Tenemos un número de cinco cifras que es cuadrado perfecto. El número formado por sus dos primeras cifras es un cuadrado perfecto. Su cifra central es un cuadrado perfecto. El número formado por sus dos últimas cifras es un cuadrado perfecto. Su cifra central es igual a la suma de sus cifras extremas. ¿Qué número es?

F.1 (12/14) Problema 5. DOBLECES

Un cuadrado de papel de 20 cm. de lado tiene una cara de color blanco y la otra cara de color gris. Dividimos cada lado en cuatro partes iguales y doblamos las puntas del cuadrado por los segmentos que se indican en la figura 1, con lo que obtenemos la situación de la figura 2. Pues bien, calcula la superficie del cuadrado blanco y la del cuadrado ABCD que lo contiene.

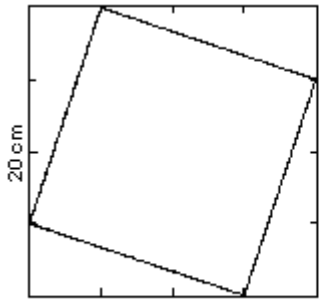


Figura 1

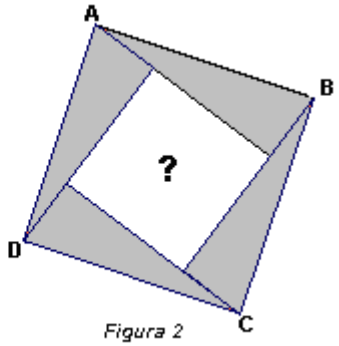


Figura 2

F.1 (12/14) Problema 6. PARTIDAS DE AJEDREZ

Dos ajedrecistas de igual maestría juegan al ajedrez. ¿Qué es más probable: ganar dos de cuatro partidas o ganar tres de seis?

(Los empates no se tienen en cuenta)

Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. NÚMEROS PRIMOS

Cuatro números primos se escriben de la siguiente manera

AA ; BAB ; BACD ; AAAC

Sabiendo que cada letra representa una cifra y que letras iguales representan a cifras iguales ¿Cuáles son esos números?

F.2 (12/14) Problema 2. MUCHAS CIFRAS

Considérese la sucesión

1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 5, ...

¿Qué cifra estará en el lugar 2005?

¿Qué lugares ocupa el número 2005?

F.2 (12/14) Problema 3. LA ESCALERA

Una escalera está apoyada en una pared vertical. El extremo superior está a 240 cm. de altura, y el que está sobre el suelo dista de la pared 60 cm.

¿Hay algún punto de esta escalera que esté a la misma distancia de la pared que del suelo?

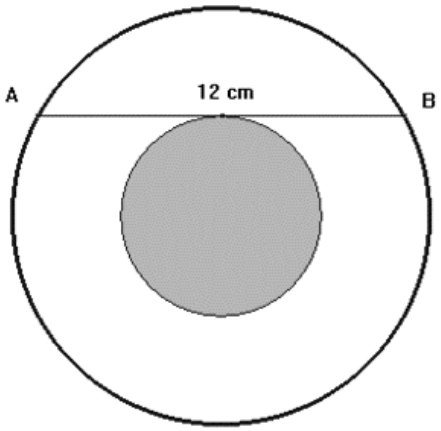
*Resuelve el problema si el extremo superior está a **m** cm. de altura, y el otro a **n** cm. de la pared.*

Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. CASO REDONDO

Hallar el área de la corona circular que se ve en el dibujo.

Sabemos únicamente que AB es una cuerda de la circunferencia grande y además es tangente a la circunferencia pequeña.



Si elegimos un punto al azar en el círculo grande, hay una probabilidad del 20% de que caiga dentro del círculo menor. Calcular el área de este círculo interior.

F.F (12/14) Problema 2. EN UN CUADRADO

Tenemos un cuadrado ABCD de centro O y radio 1. Llamamos M al punto medio del lado BC.

Calcula el área del triángulo AMO.

Calcula también el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y O

F.F (12/14) Problema 3. MÁS O MENOS

Escribimos los siete primeros números naturales consecutivos

1 2 3 4 5 6 7

Entre cada dos números colocamos un signo más (+) o un signo menos (-).

¿Podemos conseguir que el resultado final sea cero?

Prueba con los números del 1 al 10. ¿Se puede?

Intenta sacar conclusiones para cualquier secuencia de números consecutivos de 1 hasta n.

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. LAS OFERTAS

En dos supermercados de la competencia, encontramos las siguientes ofertas:

Supermercado "El barato": Compre 3 y pague 2

Supermercado "La ganga": El segundo producto a mitad de precio.

¿Cuál es la mejor oferta?

¿Para qué cantidades de productos son iguales?

F.1 (14/16) Problema 2. LA DESPEDIDA

En una reunión, un grupo de amigos se saludan del siguiente modo:

Dos chicos se dan un apretón de manos, mientras que dos chicas o un chico y una chica se dan un beso.

Al final se han dado 21 apretones de manos y 34 besos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas forman el grupo de amigos?

F.1 (14/16) Problema 3. OCEAN´S ELEVEN

En un casino han entrado unos ladrones y han robado todas las fichas menos las de 5 € y 8 €. El dueño decide abrir la ruleta pero sólo se pueden usar esas fichas con los valores ya dichos. ¿Cuál es la apuesta más grande que no puede aceptarse?

F.1 (14/16) Problema 4. EL FUERTE CONVEXO

Un fuerte con forma de polígono convexo y con 1000 metros de perímetro, está defendido por una compacta dotación de arqueros cuyos arcos tienen un alcance de 100 metros.

Calcula el área de la zona protegida por los arqueros y la longitud del contorno exterior de dicho territorio

F.1 (14/16) Problema 5. CUATRO NÚMEROS SEGUIDOS

Toma cuatro números naturales consecutivos y multiplícalos, ¿Qué observas?

1.2.3.4 = 24 = 25 - 1
2.3.4.5 = 120 = 121 - 1
3.4.5.6 = 360 = 361 - 1
.....
.....

Serías capaz de realizar una conjetura. ¿Y probarla?

F.1 (14/16) Problema 6. EL CORRAL DE RUCIOS

El Licenciado Maese Jacinto, amigo de Sancho Panza, tenía un corral de Rucios en forma de pentágono con 10 metros de lado. Cada tarde, tras la siesta, Sancho solía ir a ver el corral de su amigo para ir eligiendo el rucio con el que acompañaría a D. Quijote en sus andanzas.

Conforme caminaba hacia el corral diose cuenta de que podía ver tres paredes del mismo, hasta que, de repente, únicamente una pared quedaba bajo su visión.

Preguntábase Sancho acerca de cuál sería la distancia al muro del corral, en la que dejara de ver tres paredes y pasara a ver solo una. No hallando en respuesta, y tras mucho cavilar, decidió dedicar su seso a buscar un buen rucio, y dejar que fueses tu quien diese con la razón de tamaño suceso.

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. UN NÚMERO ENORME

EL número 1234... 979899100 ¿cuántas cifras tiene?

¿Es múltiplo de 3, de 5, de 6, de 8 y de 9?

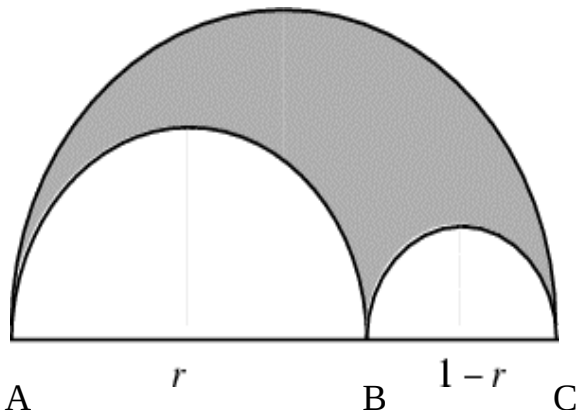
¿Cuál es el dígito que ocupa el lugar 100?

F.2 (14/16) Problema 2. EL CUCHILLO DEL ZAPATERO

La figura sombreada se llama cuchillo de zapatero (árbelos en griego)

1. *Calcula su perímetro y su área*

2. *Traza la perpendicular por B al segmento AC y llama D al punto donde corta al arco mayor. Demuestra que el área del árbelos es la misma que el área del círculo de diámetro BD*



F.2 (14/16) Problema 3. MÁS CORRALES PARA RUCIO

A Maese Jacinto, no le gustó el primer corral que hizo, y decide hacer uno rectangular, con postes separados por iguales distancias. Al terminar el corral para Rucio y los demás burros de Sancho Panza, descubrió que podía ahorrarse dos postes si el campo a cercar fuera cuadrado en vez de rectangular.

De cualquiera de las dos maneras servirá para el mismo número de burros, ya que ambos tienen la misma superficie, pero si es cuadrado, habrá un poste donde atar cada burro.

Sabiendo que hay menos de tres docenas, ¿cuántos burros tiene Sancho?

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. TORNEO DE AJEDREZ

En un torneo de ajedrez participaron 30 concursantes que fueron divididos, de acuerdo con su categoría, en dos grupos. En cada grupo los participantes jugaron una partida contra todos los demás. En total se jugaron 87 partidas más en el segundo grupo que en el primero. El ganador del primer grupo no perdió ninguna partida y totalizó 7,5 puntos. ¿En cuántas partidas hizo tablas el ganador?

En el juego de ajedrez la partida perdida cuenta como cero puntos, la ganada por un punto y las tablas por medio punto

F.F (14/16) Problema 2. MULTIRRECTÁNGULO

Un polígono es multirrectángulo si cualesquiera tres lados consecutivos a, b y c satisfacen la siguiente propiedad:

"a y b son perpendiculares, b y c son perpendiculares".

¿Cuántos ángulos interiores rectos tiene un multirrectángulo de 4 006 lados?

Demostrar que el número de lados de un polígono multirrectangulo es un número ***par****.*

F.F (14/16) Problema 3. DIVIDIR UN TRIÁNGULO

Sea un triángulo ABC y un punto P cualquiera, situado sobre uno de los lados (por ejemplo el lado BC).

Construir una recta que pase por P y divida al triángulo en dos regiones de igual superficie

Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – LAS BODAS DE CAMACHO**

Si llamamos x a la edad actual de Quiteria la de Camacho será x+10.
Del enunciado del problema se deduce la siguiente ecuación:

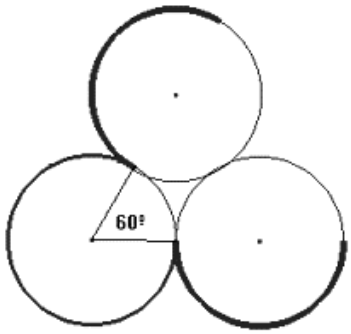
$\frac{3}{5}x = \frac{x+10}{2}$ cuya solución es x= 50, que es la edad actual de Quiteria mientras que la de Camacho será 60 años.

Los $\frac{3}{5} de\ 50 = 30\ años$ que lleva casada por lo que se casó con 20 años, y Camacho con 30 años.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – TRIÁNGULO DE DISCOS**

En cada uno de los tres lados de este triángulo tenemos 3 discos que tienen media circunferencia formando parte del perímetro.

Por otra parte tenemos tres discos que están en los vértices de este triángulo. Cada uno de ellos tiene un sector circular de 60º (que representa 1/6 de su circunferencia) dentro de la figura como se aprecia en el siguiente dibujo



es decir, tienen 5/6 partes de su circunferencia en el perímetro de la figura, porque el

Por lo tanto el perímetro total será

$$9 \cdot (\pi \cdot 2) + 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2) = 28\pi \ cm$$

SOLUCIONES DE ALUMNOS

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

- Si unimos los centros de las circunferencias de los vértices de la figura, se forma un triángulo equilátero cuyos lados dividen a las circunferencias exteriores en semicircunferencias. Debemos calcular por tanto la longitud de las semicircunferencias que se forman.
- Las tres circunferencias de los vértices completan el perímetro exterior, pero no con toda su longitud, como veremos a continuación.
- El perímetro exterior de la figura será la suma de las longitudes de las semicircunferencias de los lados y de las circunferencias de los vértices, en la parte que les corresponda.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

- Longitud de las circunferencias: $\mathbf{L} = 2 \bullet \boldsymbol{\pi} \bullet \mathbf{r}$; $\mathbf{L} = 2 \bullet 3{,}14 \bullet 2 = 12{,}56\mathbf{cm}$
- Perímetro de las semicircunferencias: $\frac{9}{2} \bullet \mathbf{L} = \frac{9}{2} \bullet 12.56 = 56{,}52\mathbf{cm}$
- Como cada ángulo del triángulo mide 60°, el perímetro que corresponde a una circunferencia del vértice será $\frac{360° - 60°}{360} \bullet \mathbf{L} = \frac{5}{6} \bullet 12{,}56 = \frac{62{,}8}{6}\mathbf{cm}$

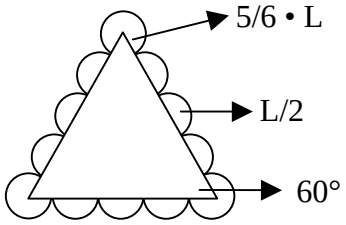
- Perímetro ocupado por las tres circunferencias del vértice: $\frac{62{,}8}{6} \cdot 3 = 31{,}4\mathbf{cm}$

SOLUCIÓN: El perímetro total de la figura será: 56,52 + 31,4 = 87,92 cm

Emilio José Alarcón Ortega. 2º de E.S.O. IES Julio Rey Pastor

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

- Al unir los centros de las circunferencias de los vértices de la figura se forma un triángulo equilátero.
- Los lados del triángulo dividen a las circunferencias de los lados de la figura en semicircunferencias. Tenemos que calcular la longitud de las 9 semicircunferencias.



- La longitud de los arcos de las circunferencias de los vértices es 5/6 de la longitud de cada disco, pues si a 360° le corresponde la longitud de la circunferencia, entonces la longitud de cada arco será $\frac{360° - 60°}{360°} \cdot \mathbf{L} = \frac{5}{6} \cdot \mathbf{L}$
- Por último, si sumamos las longitudes de las semicircunferencias y de los tres arcos de circunferencia de los vértices, tendremos la longitud del perímetro total de la figura.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

- Longitud de cada disco: $\mathbf{L} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56\mathbf{cm}$
- Longitud de las 9 semicircunferencias: $\frac{9 \cdot 12{,}56}{2} = 56{,}52\mathbf{cm}$
- Longitud de los arcos de las circunferencias de los vértices: $\frac{5 \cdot 12{,}56}{6} \cdot 3 = \frac{188{,}4}{6} = 31{,}4\mathbf{cm}$

- **SOLUCIÓN: Perímetro total de la figura: 56,52 + 31,4 = 87,92 cm**

Almudena Escribano Sánchez. 2º de E.S.O. IES Julio Rey Pastor

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – LA MÁQUINA FRACCIONARIA**

Si se realiza el proceso indicado, vemos que al segundo paso resulta la fracción inicial, por lo que al solicitar un número par de pasos, tendremos como resultado la misma fracción.
Puede realizarse con una fracción a/b y comprobar que las que van resultando son equivalentes, pero puede hacerse ver que son distintas fracciones, aunque un mismo número racional.

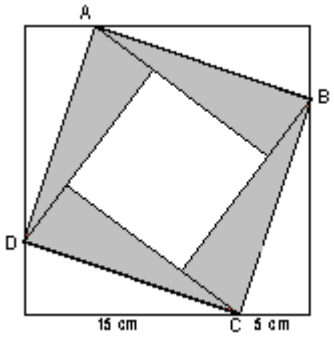
- **Solución - Fase 1 - (12/14) – EL CUADRADO PLUSCUAMPERFECTO**

Si escribimos los cuadrados perfectos de 1 y de 2 cifras, vemos que las condiciones del enunciado las cumplen:

16100, 36401, 36481, 36916, 49400, 49925, 81901 y 81981.
El único de ellos que es cuadrado perfecto es **36481** = 191^2.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - DOBLECES**

En la figura 2, no perdamos de referencia al cuadrado inicial...



- Relacionemos la superficie del cuadrado inicial con las de las figuras que lo componen...

Cuadrado inicial = Cuadrado blanco + 8 triángulos

Área del cuadrado inicial = 400cm^2

Área del triángulo $= \frac{5.15}{2} = 37.5cm^2$

El área del cuadrado blanco incógnita será = 400-8.37, 5=**100 cm^2**

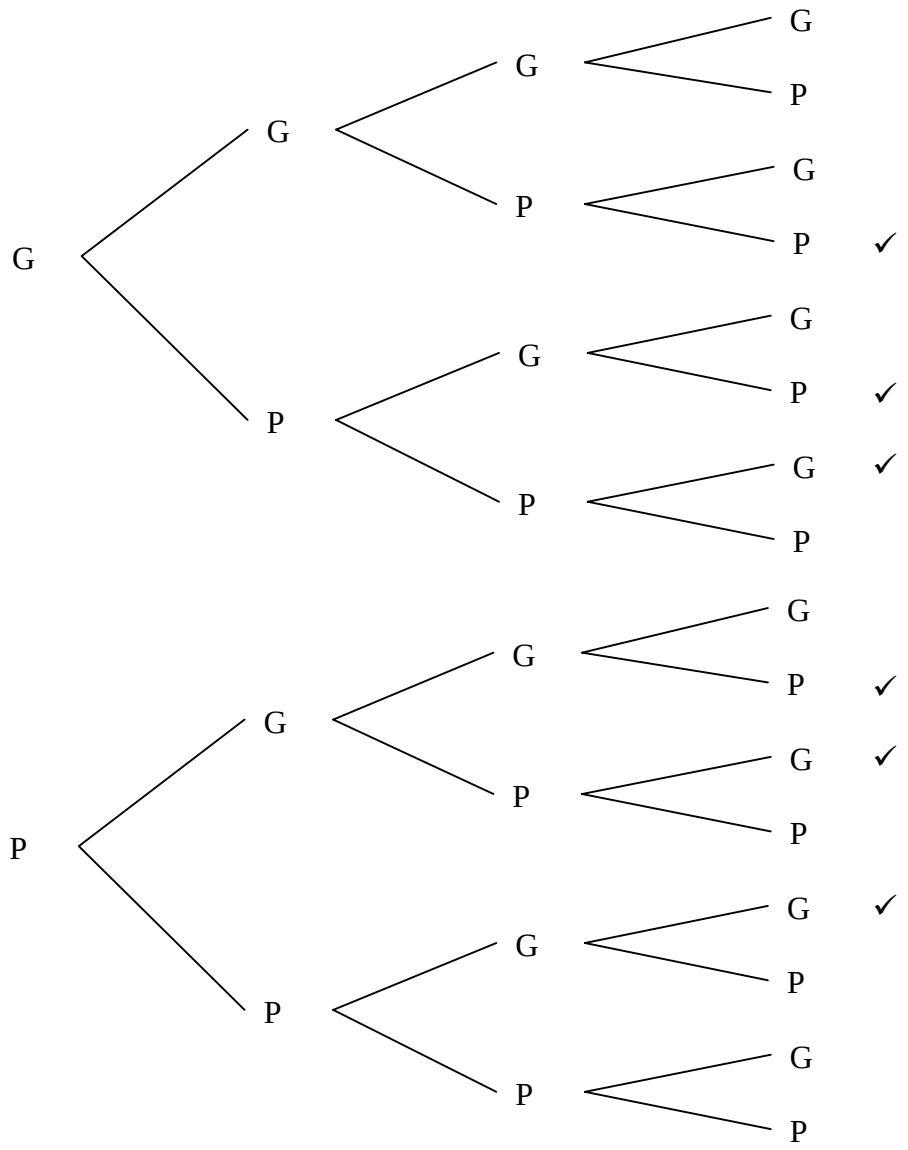
El área de ABCD = 100+4.37, 5= **250 cm^2**

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – PARTIDAS DE AJEDREZ**

Caso de cuatro partidas:
Por lo tanto, en este caso nos encontramos con 6 casos en los que se ganas dos partidas de 16 casos posibles.
El caso de 6 partidas puede deducirse a partir de este arbol, ya que, por cada resultado aparecerán dos más en el caso de 5 partidas, es decir, 32 casos y, de nuevo el doble para el caso de 6 partidas, es decir, 64 casos posibles.
Veamos ahora en cuántos de esos casos se ganan tres partidas. Para ello podemos ir repasando los rersultados favorables que se obtendría a partir de cada una de las ramas representadas en el diagrama adjunto, estudio resalizado en la página siguiente, y que nos ofrece como resultado un total de 20 casos en los que se ganan tres partidas.

Como $\frac{20}{64} < \frac{6}{16}$, la solución al problema será:

"es más fácil ganar dos partidas de cuatro que tres partidas de seis".


G
G
G
G
P
P
G
P
P
G
P
P

1ª rama:

G – G – G – G < G < G, P ; P < G, P

2ª rama:

G – G – G – P < G < G, P ; P < G, P ✓

3ª rama:

G – G – P – G < G < G, P ; P < G, P ✓

4ª rama:

G – G – P – P < G < G, P ✓ ; P < G ✓, P

5ª rama:

G – P – G – G < G < G, P ; P < G, P ✓

6ª rama:

G – P – G – P < G < G, P ✓ ; P < G ✓, P

7ª rama:

G – P – P – G < G < G, P ✓ ; P < G ✓, P

8ª rama:

G – P – P – P < G < G ✓, P ; P < G, P

9ª rama:

P – G – G – G < G < G, P ; P < G, P ✓

10ª rama:

P – G – G – P < G < G, P ✓ ; P < G ✓, P

11ª rama:

P – G – P – G < G < G, P ✓ ; P < G ✓, P

12ª rama:

P – G – P – P < G < G ✓, P ; P < G, P

13ª rama:

P – P – G – G < G < G, P ✓ ; P < G ✓, P

14ª rama:

P – P – G – P < G < G ✓, P ; P < G, P

15ª rama:

P – P – P – G < G < G ✓, P ; P < G, P

16ª rama:

P – P – P – P < G < G, P ; P < G, P

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – NÚMEROS PRIMOS**

Es claro que A, B, C y D representan a cifras impares.

1) Para que AA sea primo, A tiene que ser 1.

2) Si 111C es primo, C no puede ser 3 ni 9 ya que 111C sería múltiplo de 3. C no puede ser 5 porque 111C sería múltiplo de 5. Luego C = 7.

3) Si B1B es primo, B no puede ser 5. Por tanto B tendrá que ser 3 ó 9.

Si B = 3, entonces D = 9 y el número BACD = 3179 es múltiplo de 11. Como esto no puede ser porque BACD es primo, entonces:

B = 9 y D = 3. Los números son, respectivamente:

11; 919; 9173; 1117

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – MUCHAS CIFRAS**

Hasta el último 2 004 hay 1 + 2 + 3 +...+ 2004 = $\frac{(1+2004)\cdot 2004}{2} = \mathbf{2009010}$ *términos.*

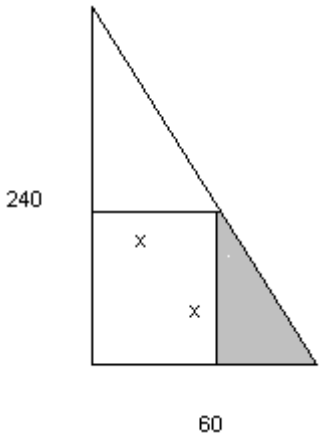
Luego el número 2005 ocupa desde el lugar 2 009 011 al 2 011 015

Hasta el último número n hay 1 + 2 + 3 +... + n = términos

Si hacemos $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ *= 2005, y resolviendo esta ecuación n = 62, 82...*

Luego en la posición 2 005 está el número 63

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – LA ESCALERA**



El triángulo grande y el coloreado son semejantes luego $\frac{240}{60} = \frac{x}{60 - x}$
Resolviendo la ecuación x = 48 cm

Generalizando $\frac{m}{n} = \frac{x}{n - x}$

Resolviendo la ecuación x = $\frac{m \cdot n}{m + n}$

- **Solución - Fase Final - (12/14) – CORONA CIRCULAR**

Sabemos que el área de la corona circular es $\pi \cdot (R^2 - r^2)$, siendo R el radio de la circunferencia mayor, y r el radio de la menor.

Podemos construir un triángulo rectángulo de catetos r y 6 y d e hipotenusa R. Obtendremos la igualdad $(R^2 - r^2) = 36$. Luego el área de la corona circular es $36\,\pi$

Si la probabilidad dada es el 20 % significa que el área del circulo mayor entre el menor será 5

$\frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot r^2} = 5$; $R^2 = 5 \cdot r^2$; $36 + r^2 = 5r^2$; $4r^2 = 36$; luego r = 3

- **Solución - Fase Final - (12/14) – MAS O MENOS**

La suma de los números 1, 2 , 3, 4, , n es $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Esta cantidad debe ser par para poder dividirlos en dos grupos que sumen lo mismo. Es decir n · (n + 1) debe ser múltiplo de 4.

Luego n = 4 k , o bien n + 1 = 4 k

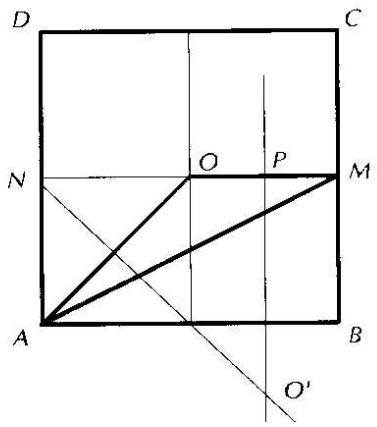
Si n = 4 k los agrupamos de cuatro en cuatro y colocamos los signos del siguiente modo

1 – 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + ...

Si n = 4 k – 1 agrupamos los tres primeros y a continuación de cuatro en cuatro como antes

1 + 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + 7 +

- **Solución - Fase Final - (12/14) – EN UN CUADRADO**



El triángulo AMO tiene de base $\frac{1}{2}$ y de altura $\frac{1}{2}$, luego el área será $\frac{1}{8}$

El centro de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y O será O´, corte de las mediatrices de los segmentos AO y OM .

La distancia PO´ es 1 / 2 + 1 / 4 = 3 / 4. La distancia PM es 1 / 4.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo O´PM obtendremos el radio O´M de la circunferencia. Obtenemos la cantidad $\frac{\sqrt{10}}{4}$

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – LAS OFERTAS**

Podemos hacer una tabla para ver qué oferta es más conveniente dependiendo del número de artículos que compremos

Nº artículos comprados	Nº artículos pagados oferta "El barato"	Nº artículos pagados oferta "La ganga"	Mejor oferta
1	1	1	=
2	2	1,5	La ganga
3	2	2,5	El barato
4	3	3	=
5	4	4	=
6	4	4,5	El barato
7	5	5,5	El barato
8	6	6	=
9	6	7	El barato
10	7	7,5	El barato
11	8	8,5	El barato
12	8	9	El barato

En la compra de un número inferior a 12 artículos, la oferta de "La ganga" sólo supera una vez a la de "El barato" y en medio artículo gratuito.

Si compramos 12 artículos, en "El barato" obtendremos uno más gratis.

Si compramos más de 12. esta ventaja no la podemos compensar con la oferta de "La ganga". de

Podemos continuar este razonamiento para más grupos de 12 artículos.

Por lo tanto son iguales las ofertas sólo para la compra de 1, 4, 5 y 8 artículos. Solamente es mejor la oferta "La ganga" para dos artículos.

En general si compramos n artículos nos regalan:

En "El barato": la parte entera de n/3.
En "La ganga": (1/2)·parte entera de n/2

La diferencia, entre estas dos cantidades, se irá haciendo tan grande como se quiera, al comprar muchos artículos. Para comprobarlo basta con fijarnos en una cantidad que sea múltiplo de 12 (12·k)

Gratis en "El barato": 4·k. Gratis en "La ganga": 3·k. Diferencia k

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – LA DESPEDIDA**

Si llamamos x al número de chicos de este grupo, tendremos un total de saludos entre ellos de $\frac{x(x-1)}{2}$ saludos

$$\frac{x(x-1)}{2} = 21 \quad ; \quad x^2 - x - 42 = 0 \quad : \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = 7 \text{ chicos}$$

También aparece la solución –6 que obviamente no es válida.

Si llamamos y al número de chicas de este grupo, tendremos un total de besos

$$7 \cdot y + \frac{y(y-1)}{2} = 34 \quad ; \text{ operando tenemos } \quad y^2 + 13y - 68 = 0 \quad : \quad \text{y la solución es } \; y = 4$$

Es decir la reunión la forman 7 chicos y 4 chicas

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – OCEAN`S ELEVEN**

Hay apuestas que con estas fichas no podemos realizar como 1€,2€,6€ etc.,
La más alta que no se puede realizar es 27€ ya que no hay ninguna combinación con fichas de 5 y/o 8 con las que se pueda obtener.
A partir de aquí se puede obtener cualquier cifra entera que queramos:
28 = 4·5+8
29 = 5+3·8
30 = 6·5
31 = 3·5+2·8
32 = 4·8
33 = 5·5+8
34 = 5·2+3·8
35 = 7·5
36 = 4·5+2·8
37 = 5+4·8

A partir de aquí puedes obtener cualquier otro simplemente sumando múltiplos de 10 (dos fichas de 5)

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – EL FUERTE CONVEXO**

Puede plantearse dibujando un polígono cualquiera para fijar ideas, no tiene por qué ser regular.

El territorio cubierto será la suma, en primer lugar, de los rectángulos de base el lado y de altura el alcance del arco, por lo que el área total de esta parte será el perímetro 1000 por el alcance, 100, es decir 100000 m^2.

En segundo lugar, habrá que sumar los sectores circulares de los vértices, que tendrán por radio el alcance de los arcos y que en total, puede comprobarse fácilmente que la suma de los ángulos es de 360º. Es decir, $\pi\,(100)^2\ m^2$.

Mediante un razonamiento análogo, el perímetro del contorno medirá:

<u>1000 + 2π (100) metros.</u>

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – CUATRO NÚMEROS SEGUIDOS**

Siguiendo esta secuencia tendremos

$$4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840 = 841 - 1 = 29^2 - 1 = (4\cdot7+1)^2 - 1$$
$$5\cdot6\cdot7\cdot8 = 1680 = 1681 - 1 = 41^2 - 1 = (5\cdot8+1)^2 - 1$$

…….

Por lo tanto la conjetura es

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) = [n\cdot(n+3)+1]^2 - 1$$

Es decir, el producto de cuatro números consecutivos es igual al cuadrado del resultado de multiplicar los dos números extremos aumentado en una unidad, y a este valor restarle uno.

Esta conjetura se puede demostrar con el cálculo simbólico.

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) = (n^2+n)\cdot(n^2+5n+6) = n^4+6n^3+11n^2+6n$$

$$(n\cdot(n+3)+1)^2 - 1 = (n^2+3n+1)^2 - 1 = n^4+6n^3+11n^2+6n$$

Antonio Márquez Costa 3º C I.E.S. ANDRÉS DE VANDELVIRA

OLIMPIADA MATEMATICA

Centros de Profesores y Recursos: Almansa, Almansa, Hellín y Villarrobledo

DIPUTACIÓN DE ALBACETE

XVI OLIMPIADA. PRIMERA FASE. NIVEL 14-16 . PROBLEMA Nº 5

CUATRO NÚMEROS SEGUIDOS

Toma cuatro números naturales consecutivos y multiplícalos, ¿ Qué observas?

1.2.3.4 = 24 = 25 - 1
2.3.4.5 = 120 = 121 - 1
3.4.5.6 = 360 = 361 - 1
.....
.....

Serías capaz de realizar una conjetura. ¿Y probarla?

$1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24 = 25-1 = 5^2-1$
$2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120 = 121-1 = 11^2-1$
$3\cdot4\cdot5\cdot6 = 360 = 361-1 = 19^2-1$
$4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840 = 841-1 = 29^2-1$
$5\cdot6\cdot7\cdot8 = 1680 = 1681-1 = 41^2-1$
$6\cdot7\cdot8\cdot9 = 3024 = 3025-1 = 55^2-1$
$7\cdot8\cdot9\cdot10 = 5040 = 5041-1 = 71^2-1$
$8\cdot9\cdot10\cdot11 = 7920 = 7921-1 = 89^2-1$
$9\cdot10\cdot11\cdot12 = 11880 = 11881-1 = 109^2-1$
$10\cdot11\cdot12\cdot13 = 17160 = 17161-1 = 131^2-1$

* 5+6=11 A un cuadrado (5) se le
11+8=19 suma 6 y da el 2º
19+10=29 cuadrado (11), a este
29+12=41 se le suma el anterior
41+14=55 más 2 (6+2=8) → 11+8=
..... =19 y de el 3er cuadrado y
..... así siguiendo.

La multiplicación de los 4 números da una cantidad x, esta cantidad, al sumarle 1 (x+1), es igual al cuadrado de un número más 1 $\sqrt{x} = y^2$.
Conforme va aumentando las serie de 4 números la y aumenta, sumandosele y múltiplo de 2. *
La fórmula es:

$$n_y = \left[n_{y-1} + (2y+2)\right]^2 - 1$$

y = al nº de orden de las series, o al 1er nº de esta (1 → 1.2.3.4, 6 → 6.7.8.9)
n = el nº que sale de la multiplicación que buscamos. (y = 55² - 1 → → 6.7.8.9)

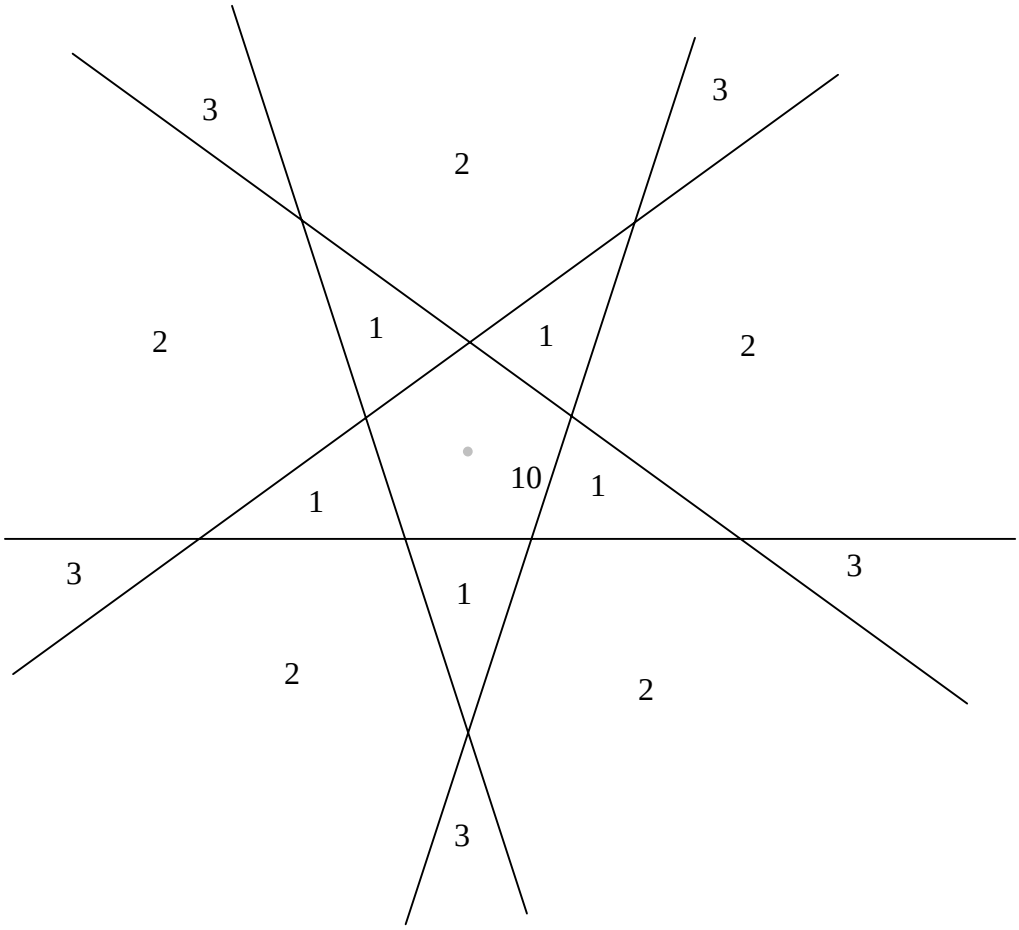
n_{y-1} = este número a de ser sin cuadrado y sin -1 (n_5 = 41)

Ej. $n_7 = \left[n_6 + (2\cdot7+2)\right]^2 - 1$
$n_7 = \left[55 + 16\right]^2 - 1$
$n_7 = 71^2 - 1$

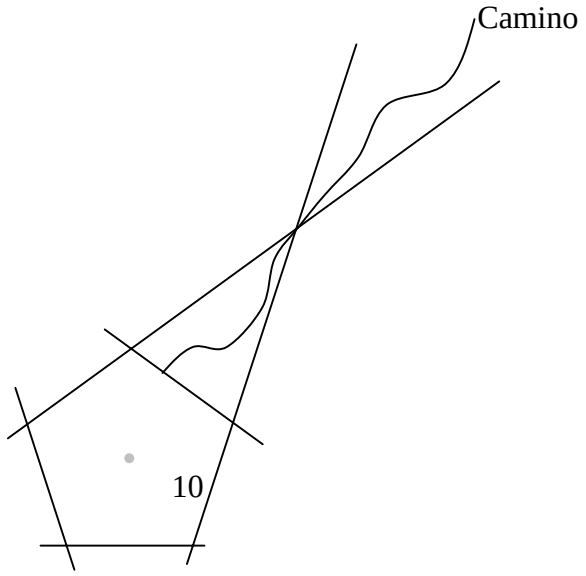
XVI OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – EL CORRAL DE RUCIOS**

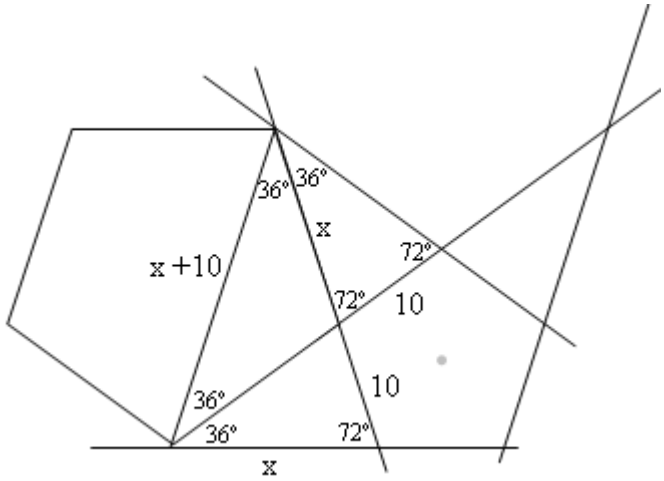
Tenemos un corral pentagonal, con apotema de longitud 10 metros. Si extendemos sus lados obtendremos una figura como la de la imagen, en la que marcamos la cantidad de paredes que pueden verse desde cada zona:



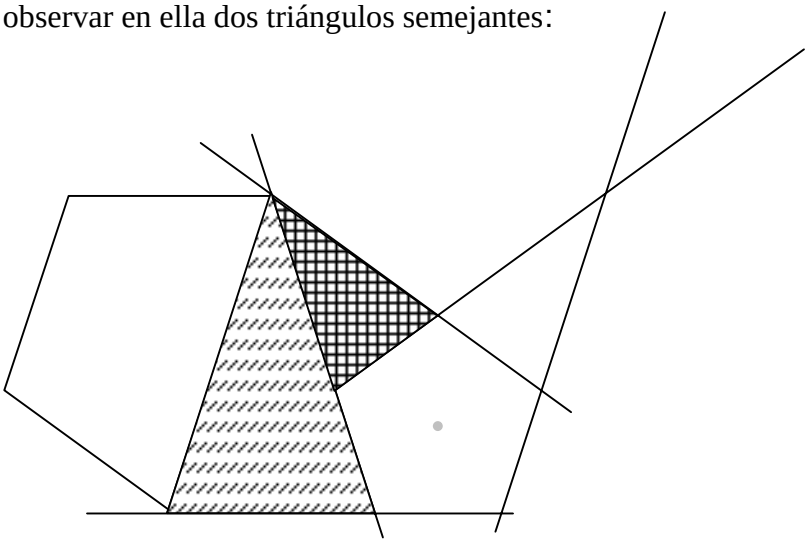
Queda claro que el camino que Sancho seguía debía ser de la forma que se ve en la imagen siguiente.



Por otra parte, si nos fijamos en la imagen:

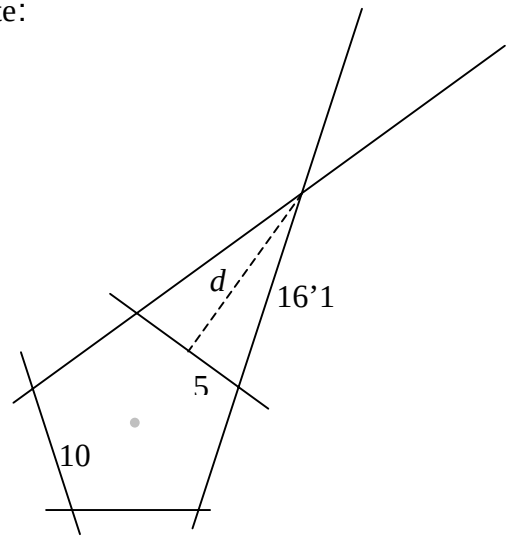


Podemos observar en ella dos triángulos semejantes:



De donde deducimos que $\frac{x}{10} = \frac{x+10}{x}$, es decir, $x^2 - 10x - 100 = 0$, cuya solución positiva es diez veces el número de oro.

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Pitágoras tal y como se ilustra en la imagen siguiente:



Obteniendo *d = 15'3* metros, distancia a la que Sancho dejara de ver tres paredes y pasara a ver solo una.

Antonio Márquez Costa 3º C, I.E.S. ANDRÉS DE VANDELVIRA

OLIMPIADA MATEMATICA

Centros de Profesores y Recursos Albacete, Almansa, Hellín y Villarrobledo

DIPUTACIÓN DE ALBACETE

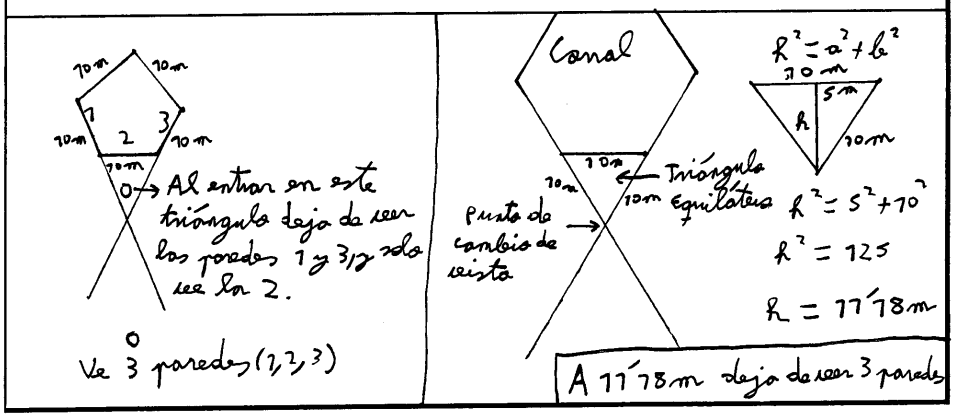
XVI OLIMPIADA. PRIMERA FASE. NIVEL 14 – 16. PROBLEMA Nº 6

EL CORRAL DE RUCIOS

El Licenciado Maese Jacinto, amigo de Sancho Panza, tenía un corral de Rucios en forma de pentágono con 10 metros de lado. Cada tarde, tras la siesta, Sancho solía ir a ver el corral de su amigo para ir eligiendo el rucio con el que acompañaría a D. Quijote en sus andanzas.

Conforme caminaba hacia el corral diose cuenta de que podía ver tres paredes del mismo, hasta que, de repente, únicamente una pared quedaba bajo su visión.

Preguntábase Sancho acerca de cuál sería la distancia al muro del corral, en la que dejara de ver tres paredes y pasara a ver solo una. No hallando en respuesta, y tras mucho cavilar, decidió dedicar su seso a buscar un buen rucio, y dejar que fueses tu quien diese con la razón de tamaño suceso.



XVI OLIMPIADA

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – UN NÚMERO ENORME**

El número está formado por 9 números de 1 cifra, 90 de dos cifras y uno de tres cifras. En total tiene 190 cifras

- Es múltiplo de 5 (por que termina en 0)

- Para ver si es múltiplo de 3 sumaremos sus cifras, pero basta sumar las que no lo son: 1, 2, 4 , 5 , 7 , 8

La cifra 1 aparece 21 vez, suman 21
La cifra 2 aparece 20 veces, suman 40
La cifra 4 aparece 20 veces, suman 80
La cifra 5 aparece 20 veces, suman 100
La cifra 7 aparece 20 veces, suman 140
La cifra 8 aparece 20 veces, suman 160

Luego en total suman 541 que no es múltiplo de 3

- Luego no será múltiplo ni de 6 ni de 9.

- El número enorme se puede escribir como 1234....979899 · 1000 (que es múltiplo de 8) + 100 (que no es múltiplo de 8). Por lo tanto el número no es múltiplo de 8

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – EL CUCHILLO DEL ZAPATERO**

Perímetro = suma de los arcos AB, BC y AC

Arco AC: longitud $\pi \cdot \frac{1}{2}$

Arco AB: longitud $\pi \cdot \frac{r}{2}$

Arco BC: longitud $\pi \cdot \frac{1-r}{2}$

Si sumamos, tenemos que el perímetro es π

El área será el semicírculo de diámetro AC menos los semicírculos de diámetros AB y BC. Aplicando las fórmulas correspondientes se obtiene $\frac{\pi}{4}\cdot(r-r^2)$

Se puede deducir que $BD^2 = r\,(1 - r)$

El área del círculo de diámetro BD será $\pi\cdot$ $(BD/2)^2$ $= \frac{\pi}{4}\cdot(r-r^2)$, como queríamos demostrar.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – MÁS CORRALES PARA RUCIO**

<u>Este problema se puede hacer probando.</u>

Tomamos como unidad de medida la distancia constante que separa dos postes.

Si hacemos un corral cuadrado de x unidades de lado, tendrá un total de 4x postes y un área de x^2

Si hacemos un corral rectangular de y de base, para que tenga 2 postes más que el anterior tiene que tener 2x – y +1 de altura.

Igualando las áreas $x^2 = y\cdot(2x-y+1)$

$$x^2 - 2y\cdot x + (y^2 - y) = 0$$

resolviendo y simplificando

$$x = y \pm \sqrt{y}$$

Podemos hacer soluciones pero siempre que 4x < 36, es decir x < 9

Lado del cuadrado (X)	Lados del rectángulo (Y, 2X-Y+1)	
2	1	4
6	4	9
12 (ya no vale)	9	16

- **Solución - Fase Final - (14/16) – TORNEO DE AJEDREZ**

En primer lugar vamos a calcular el número de jugadores en cada grupo. Sea x el número de jugadores del primer grupo, los del segundo grupo serán 30 – x

En el primer grupo se jugaron $\frac{x(x-1)}{2}$ partidas

En el segundo grupo se jugaron $\frac{(30-x)(29-x)}{2}$ partidas

Tendremos la ecuación

(30-x)(29-x)/2 - x(x-1)/2 = 87

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos: x = 12.

Luego hubo 12 jugadores en el primer grupo y 18 jugadores en el segundo grupo.

El ganador del primer grupo jugó 11 partida. Si llamamos e al número de partidas en las que hizo tablas:

0'5· e + (11- e) = 7'5

Resolviendo la ecuación llegamos a la solución del problema: e = 7 partidas.

- **Solución - Fase Final - (14/16) - MULTIRRECTÁNGULO**

La suma de los ángulos de un polígono de n lados es 180(n-2).
En un polígono multirrectángulo solo hay ángulos de 90º y de 270º, sea x el número de ángulos rectos que tiene el polígono, entonces de 270º habrá n-x.

Por tanto se debe de verificar siempre esta igualdad:

90 x+ 270 (n-x)=180 (n-2)

de donde deducimos que **n=2x-4**

Es decir que el número de lados de un polígono multirrectángulo es el doble del número de ángulos rectos menos cuatro, por tanto siempre número par, siendo x el número natural mayor que 4 que queramos.

El polígono de 4006 lados tiene: 4006=2x-4

X= 2005 ángulos rectos.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – DIVIDIR UN TRIÁNGULO**

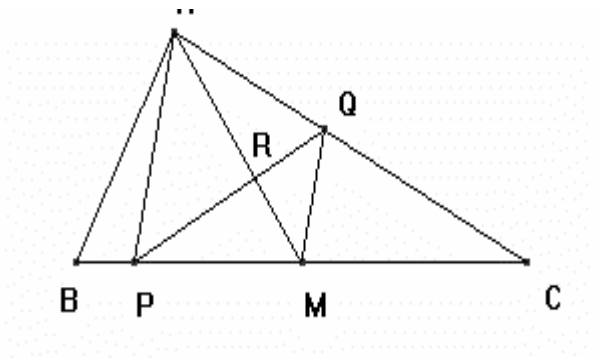
El problema se puede realizar por varios métodos. Este es uno de ellos.

Si el triángulo es ABC y el punto es P. Para resolver el problema hay que seguir los siguientes pasos:

1) Dibujar el segmento PA

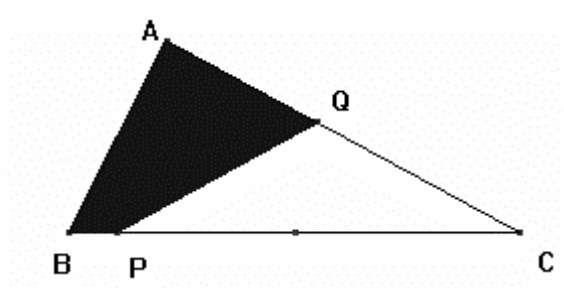
2) Obtener el punto medio (M) del lado BC

3) Dibujar la recta paralela a PA pasando por el punto M, dando lugar al segmento MQ

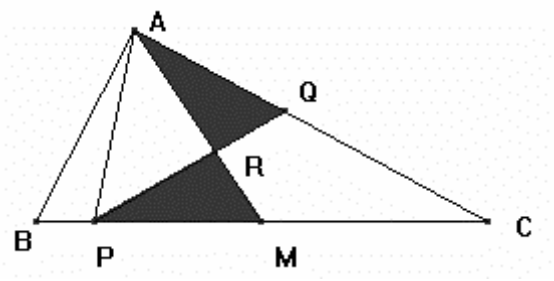


En estas condiciones resulta que el segmento PQ divide al triángulo ABC en dos áreas iguales.

.



Los triángulos ABM y ACM son tienen la misma superficie (tienen la misma longitud de sus bases y la misma altura).



Para demostrar que ABPQ tienen la misma superficie que CPQ, basta con verificar que los triángulos sombreados tienen la misma área. Pero como los triángulos APQ y AMP tienen una base común e igual altura (por ser AP y QM paralelas), por tanto tienen igual superficie. Si a ambas se le resta el área común APR, resulta lo que estábamos buscando, esto es: El área del triángulo AQR es igual al área del triángulo MPR.

FOTOGRAFÍA Y MATEMÁTICAS

(Fotografías realizadas por los finalistas en Villamalea)

ACUÁTICAS PARÁBOLAS

POLÍGONOS DIVERTIDOS

LA GEOMETRÍA TE AVISA

DELICIOSAS ESFERAS

SERIES FLORALES

EL PORTAL (MATEMÁTICO) DE BELÉN