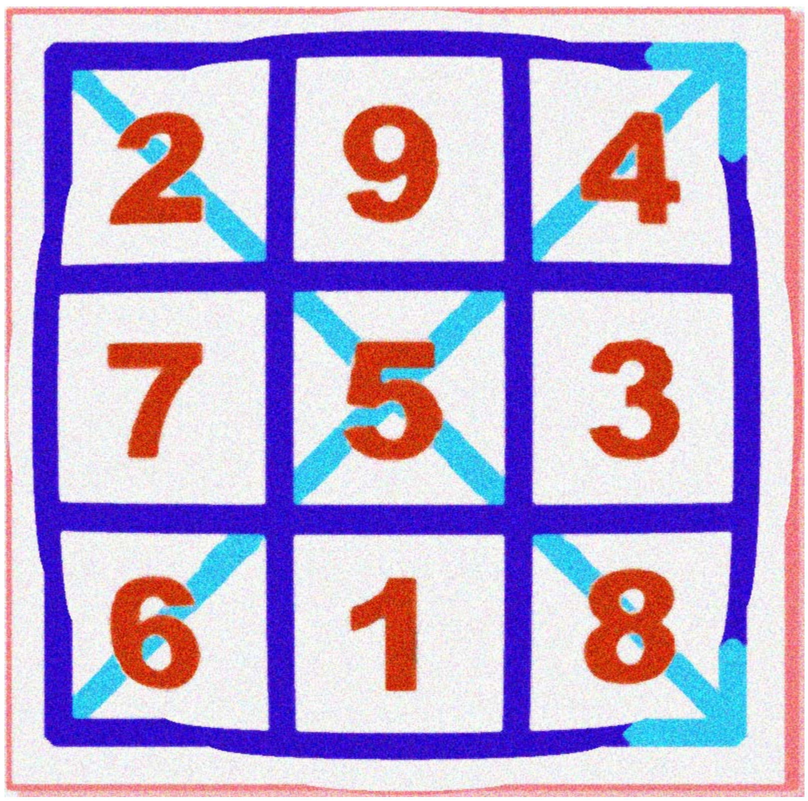
XV OLIMPIADA MATEMÁTICA



Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS - S.C.M.P.M.

ISBN 84-689-1310-3
Depósito legal Albacete 172-2005

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete.

También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI.

Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes “resolutores”, el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

EL COMITÉ ORGANIZADOR
Antonio Bueno Aroca
Antonio Díaz Carrillo
Bernardino Del Campo López
Jesús García Segovia
Juan Emilio García Jiménez
Juan Martínez-Tébar Giménez
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta

XV Olimpiada Provincial de Albacete

XV Olimpiada

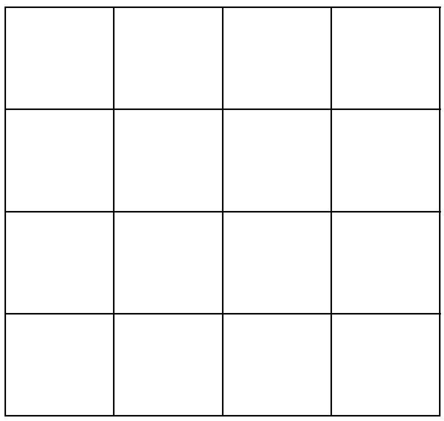
La Roda 2004

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. POSITIVOS Y NEGATIVOS

Tenemos un cuadrado 4 x 4, formado por 4 casillas en cada fila y en cada columna. En cada una de las 16 casillas situamos un número a elegir entre +1 y –1, de modo que al multiplicar todos los números de cualquier fila y de cualquier columna el resultado sea siempre –1.



¿Cuál es la cantidad de –1 que debemos poner? ¿Y la máxima?

¿Cuáles serán estas cantidades si en lugar de un cuadrado de 4 x 4 tenemos un cuadrado de n x n casillas?

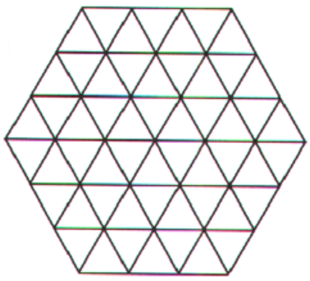
F.1 (12/14) Problema 2. CON LA MÚSICA A OTRA PARTE

Un juguete musical tiene tres botones. Apretando uno suena una melodía de Mozart, apretando otro una melodía de Beethoven, y apretando un tercero de obtiene una de las dos melodías anteriores al azar. Cada botón tiene al lado una etiqueta con las letras B, M y B-M que corresponderían con las melodías, sino fuera porque nos equivocamos al pegarlas y ninguna está en su lugar correcto. ¿Qué número mínimo de intentos es suficiente para descubrir la melodía que suena en cada botón?

F.1 (12/14) Problema 3. DIVIDIENDO UN HEXÁGONO

Tenemos un hexágono regular cuyo lado tiene una longitud que se expresa mediante un número entero. Trazando paralelas a todos sus lados, se puede dividir el hexágono en triángulos equiláteros cuyo lado mide la unidad.

En esta figura se muestra lo que ocurre si el lado del hexágono es de 3 unidades.



*Encontrar el número de triángulos que se forman cuando el lado del hexágono sea de **n** unidades.*

F.1 (12/14) Problema 4. ECHAR EL RESTO

Cuál es el menor número que dividido por 2,3,4,5 y 6 da , respectivamente, los restos 1, 2,3,4 y 5?

F.1 (12/14) Problema 5. SIETE PUNTOS

Marca 7 puntos no alineados en el plano. ¿Cuántos triángulos distintos puedes obtener uniendo 3 de esos puntos?, ¿cuántos cuadriláteros uniendo 4 puntos?

F.1 (12/14) Problema 6. JARDINES

La familia de Alberto Pérez quiere construir un jardín delante de su casa. Han comprado alambrada como para 19 metros de valla y una puerta de 1 metro. Han decidido que el jardín tenga forma rectangular o cuadrada. ¿Cuál debe ser el largo y el ancho para que el jardín tenga la mayor área posible?

La familia de Enrique Jiménez también está construyendo un jardín con 19 metros de valla y una puerta de 1 metro pero han decidido aprovechar una valla de un antiguo jardín, de forma que sólo tienen que construir tres lados del rectángulo. La valla antigua mide 20 metros. ¿Qué dimensiones debe tener el jardín para que su superficie sea máxima?

Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. PIRATAS DEL CARIBE

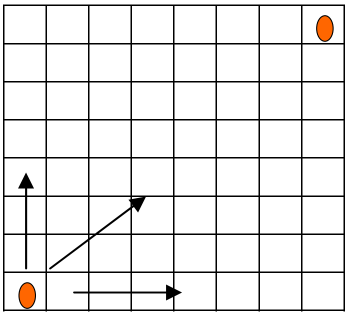
A su isla llegan 17 piratas para repartirse un botín que consiste en un saco con más de 100 monedas de oro. Efectuado el reparto, sobra una moneda. Para que no sobre ninguna, los piratas deciden matar a uno de ellos y efectuar nuevamente el reparto. Efectuado éste vuelve a sobrar una moneda.

(a) ¿Cuál es el número mínimo de monedas que contiene el cofre?

(b) Conocido dicho número mínimo, ¿cuántos piratas morirán hasta que efectuado el reparto no sobre ninguna moneda?

F.2 (12/14) Problema 2. CAZA CARTESIANA

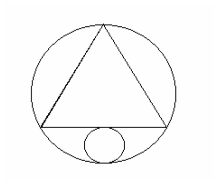
Es un juego para dos jugadores A y B.



- *En un tablero de 8 x 8 se coloca una ficha en la esquina inferior izquierda. Juega A y debe mover la ficha un cuadro hacia arriba, hacia la derecha o en la diagonal. Juega B y del mismo modo, debe mover la ficha desde la posición que ahora ocupa, un cuadro hacia arriba, hacia la derecha o en la diagonal.*
- *Gana el jugador que lleve la ficha a la casilla superior derecha.*
- *¿Puedes encontrar una estrategia para que alguno de los jugadores gane siempre?*

F.2 (12/14) Problema 3. CÍRCULOS Y TANGENCIAS

En una circunferencia inscribimos un triángulo equilátero. Una segunda circunferencia es tangente a la 1ª y tangente a la base del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura.

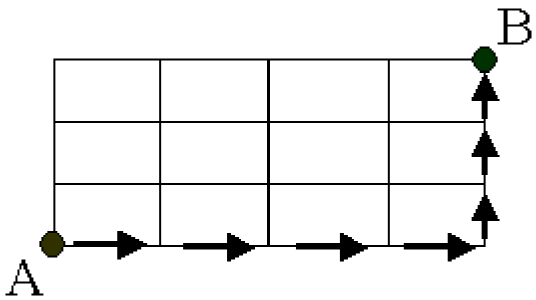


¿Qué relación existe entre las longitudes de estas dos circunferencias?

Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. EL CAMINO

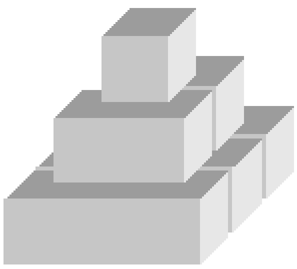
Letizia es una niña que vive en una ciudad como La Roda, cuyas calles forman una perfecta red cartesiana.



La mayoría de las veces camina desde un punto a otro siguiendo el camino marcado. ¿Pero cuántos caminos distintos puede elegir?

F.F (12/14) Problema 2. LA ESCULTURA

Un escultor forma con 14 cubos de 1m. de lado una figura piramidal, como el dibujo, que decide pintar una vez montada. Determina los m de superficie que ha de pintar.



F.F (12/14) Problema 3. ASAMBLEA DE SOCIOS

El pasado Jueves se reunió la Asamblea General del Club "Veritas", y todos los asistentes se sentaron en una mesa circular.

Hay dos tipos de socios: SM "Siempre mienten" y SV "Siempre dicen la verdad".

Para distinguirlos les preguntamos por turno si eran SM o si eran SV, y TODOS aseguraron ser SV.

Al preguntarles de nuevo "¿cómo es su vecino de la izquierda?", respondieron TODOS que el socio de la izquierda es SM.

Al escribir la crónica de la Asamblea había olvidado cuántos eran y llamé al Presidente, quien me informó que eran 37.

Como no sabía si el Presi era SM o SV, decidí preguntar al Secretario, quien me dijo que en realidad asistieron 40, ya que el presi es SM.

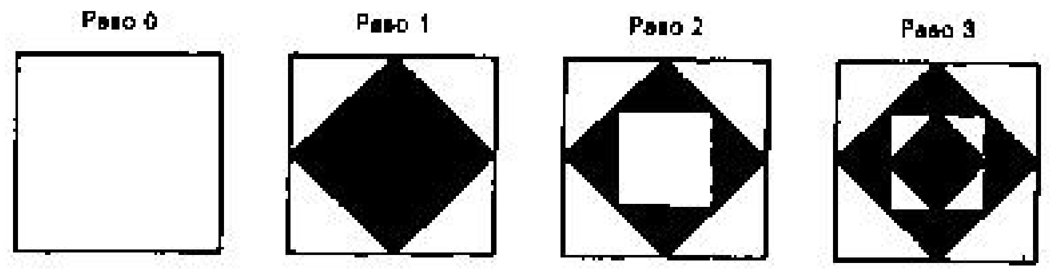
¿Cuántos socios asistieron a la Asamblea?

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. CUADRADOS Y DIAMANTES

La serie que ves en la imagen se ha realizado tomando un cuadrado en blanco, marcamos los puntos medios de los lados, unimos y coloreamos de negro el cuadrado que se forma. Después unimos los puntos medios del cuadrado negro (diamante), los unimos y coloreamos de blanco. Estos son los cuatro primeros modelos:



A la vista de esta serie, nos planteamos las siguientes cuestiones:

¿Cuántos cuadrados y cuantos diamantes encontraríamos en el paso 10? ¿Y en el 100? Generaliza para cualquier número de pasos.

¿De qué color será la región central? En el paso 10, en el 67,... y en general.

¿Habrá más superficie blanca o negra?

¿Cuántos triángulos blancos y cuántos negros hay en un paso cualquiera?

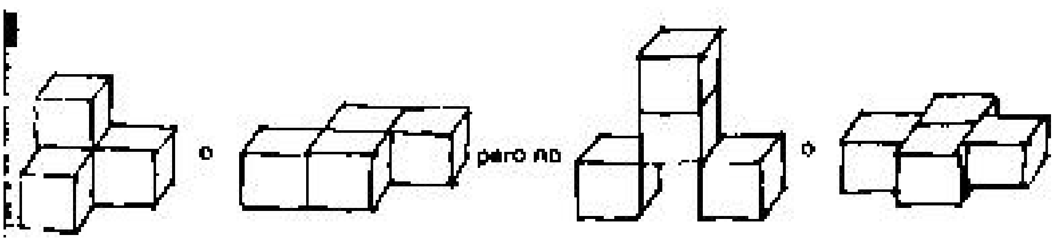
F.1 (14/16) Problema 2. LA CUERDA QUE CUADRA

Un cuadrado está rodeado por una cuerda totalmente ajustada a su perímetro, si añadimos 1 metro a la cuerda y tiramos hacia fuera desde los vértices del cuadrado, en la dirección de las diagonales, ¿a qué distancia del punto medio de cada lado quedará la cuerda?

¿Y si la figura es un rectángulo de lados cuya longitud es m y n, respectivamente?

F.1 (14/16) Problema 3. CASAS DE CUTRO CUBOS

Hay descontento en la ciudad de los pitufos. Algunas casas son más bonitas que otras. Paulus, que es conocido como buen mediador propone reconstruir la ciudad. Los pitufos vivirán por parejas en casas que tienen un salón, una cocina y dos dormitorios. Las habitaciones tienen todas forma de cubos iguales y cada casa se ha de construir con cuatro cubos, con las caras que se tocan:



Pero la ciudad sería aburrida si todas las casas fuesen iguales.

¿Cuántas casas diferentes pueden construir los pitufos?

Las casas se van a edificar en una parcela donada por el Ayuntamiento. El presupuesto para la construcción se hace a partir de las siguientes tarifas:

La unidad cuadrada edificada (se toma como unidad de superficie la cara de un cubo), cuesta 1.000 €

Por cada unidad cuadrada de pared exterior se pagan también 1.000 €.

Los interiores de las casas cuestan todos lo mismo.

Determinar cuál es la casa más barata y la más cara.

F.1 (14/16) Problema 4. CUESTIÓN DE PESO

El doctor Tilla tiene una clínica dietética, donde lo primero que hacen con un paciente es pesarlo.

En una semana el promedio del peso de los hombres que acudieron a la consulta ha sido de 90 Kg., mientras que el promedio del peso de las mujeres ha sido de 65 Kg. Si hacemos el promedio de todos los pesos contando hombres y mujeres nos da 75 Kg.

- *¿Puedes decirnos quiénes acudieron más a la clínica, hombres o mujeres?*
- *¿Sabrías decir la proporción?*

F.1 (14/16) Problema 5. SIMPLIFICACIÓN

Investiga porque la extravagante simplificación de fracciones:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

da un resultado correcto. Puedes encontrar otras (todas) las parejas de números de dos cifras donde se cumpla esta curiosa igualdad.

F.1 (14/16) Problema 6. EL DELEGADO

En la clase de Andrés no quiere nadie presentarse a delegado, por lo que decidieron jugárselo a cara o cruz.

Tiran la moneda por orden alfabético y el primero que saque cara será elegido delegado.

Según este criterio la probabilidad que cada uno tiene de ser delegado viene dada por la fórmula $(1/2)^n$*, siendo n el número de lista.*

¿Podrías justificar la fórmula?

¿Es equitativo el procedimiento?

¿Quién habrá propuesto el procedimiento: Abellán o Serrano?.

Expresa en notación científica la probabilidad que tiene el último de la lista en ser delegado si hay 20 alumnos en la clase.

Ha salido elegido delegado un alumno cuya probabilidad de salir era $9'765625.10^{-4}$*, ¿qué lugar ocupa en la lista?*

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. RESTAR DIVISORES

Se trata de un juego para dos jugadores.

Se escribe el número 24. El primer jugador elige un divisor de ese número y se lo resta. El otro jugador hace lo mismo con el resultado de la resta anterior, es decir, elige un divisor suyo y se lo resta. Y así sucesivamente.

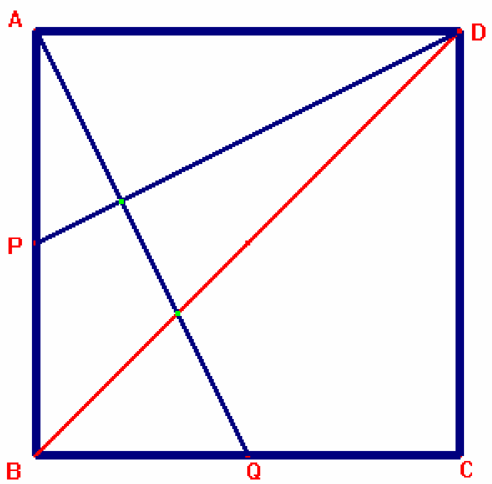
El jugador que obtenga como resultado de su resta cero pierde la partida. ¿Podrías encontrar una estrategia para ganar este juego?

Prueba a jugar ahora empezando por el número 45.

Encuentra una estrategia si se empieza con cualquier número natural n.

F.2 (14/16) Problema 2. UN REPARTO GEOMÉTRICO

El conocido matemático don Pepe Cuadrado ha dejado en herencia a su esposa y a sus cinco hijos una finca cuadrada de 120 m de lado para que se la repartan según las siguientes indicaciones:



Siendo P y Q los puntos medios de los segmentos AB y BC respectivamente, se trazan los segmentos DP, DB y AQ, con lo que la finca queda dividida en 6 partes.

La mayor parte es para la esposa, la que le sigue en superficie para el mayor de los hijos, la siguiente para el segundo y así hasta la parte más pequeña que será para la hija menor.

Determina el área de cada región y la asignación de las seis partes.

F.2 (14/16) Problema 3. NÚMEROS DE LUCAS

Los números de Lucas se construyen de la misma forma que los de Fibonnacci, aunque los primeros son diferentes. Los primeros números de Lucas son 1,3,4,7,11,18,29,47,... El 29 número de Lucas es 1.149.851 y el 30º es 1.860.498.

a. *Escribe los quince primeros números de Lucas.*

b. *Halla la suma de los treinta primeros.*

c. *Halla la suma de los términos de lugar impar de los números de Lucas, empezando por el 29º.*

d. *Halla la suma de los términos de lugar par, empezando por el segundo y terminando por el 30º.*

e. *¿Qué números de Lucas son pares?*

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. A LA RODA A POR UVAS

Una cuadrilla de vendimiadores de La Roda debe cosechar la uva de dos viñedos, uno de doble superficie que el otro.

Durante medio día todos trabajan en el viñedo grande; después de comer la mitad de la cuadrilla lo hace en el viñedo grande y la otra mitad en el pequeño.

Al finalizar la jornada queda recolectada toda la uva de la finca más grande y sin terminar una parte de la pequeña que ocupa a un vendimiador el día siguiente.

¿Cuántos trabajadores tenía la cuadrilla?

F.F (14/16) Problema 2. HOMENAJE A SALVADOR DALÍ

Este año 2004 se cumple el centenario del nacimiento del Genial artista catalán, Salvador Dalí, uno de los máximos exponentes del surrealismo que desarrolló en multitud de facetas: pintura, grabado, orfebrería y decoración.

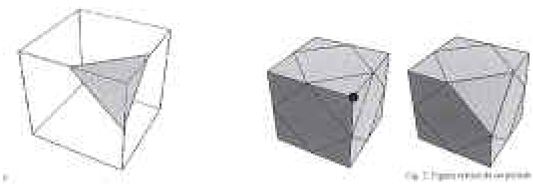
Los elementos simbólicos-geométricos son evidentes en muchas de sus obras. Un ejemplo de ello es "La Santa Cena" (1955), donde Cristo y los apóstoles permanecen dentro de un dodecaedro pentagonal, poliedro regular que, según los discípulos de Platón, representa la Quinta Esencia, pues dentro de este poliedro se pueden inscribir los demás *poliedros regulares, el cubo, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, representación de los cuatro elementos del Universo, la tierra, el fuego, el agua y el aire.*

Calcula de manera razonada el número de Caras, Vértices y Aristas del ICOSIDODECAEDRO. (Poliedro que resulta de truncar el Dodecaedro a una distancia de la mitad de la arista)

Calcula el área total de este poliedro si partimos de un dodecaedro de 10 cm. de arista.

INFORMACION ADICIONAL:

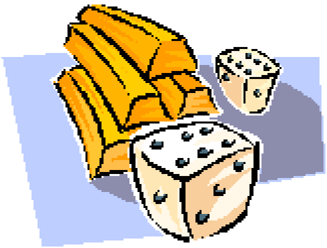
1.- Truncar un poliedro es cortar las esquinas de este a una misma distancia del vértice. Observa en la figura el truncamiento de un cubo a una distancia de la mitad de la arista:



2.- La diagonal y el lado de un pentágono regular se encuentran en la proporción Áurea:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

F.F (14/16) Problema 3. JUGADORAS



Petri Lera y Tina Ipe son dos amigas que les gusta mucho ir al casino. A las dos les gustaría ir a Las Vegas pero sólo tienen dinero para un pasaje, por lo que deciden jugárselo.

A Petri le gusta mucho la ruleta y a Tina los dados, por lo que primero harán girar la ruleta y luego lanzarán un dado.

Con una calculadora dividirán el número que ha salido en la ruleta (una ruleta tiene 37 casillas numeradas del 0 y el 36) entre el obtenido al lanzar el dado. Si el resultado sale con decimales irá Petri, si sale entero irá Tina.

¿Quién crees que tiene más posibilidades de pasar un fin de semana en las Vegas?

Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - POSITIVOS Y NEGATIVOS**

  Para el cuadrado de 4 x 4, la mínima cantidad de –1 es cuatro, pues debe haber, al menos, uno en cada fila. Una posible solución es colocarlos en una diagonal.
  La máxima cantidad es doce, porque como máximo puede haber tres en cada fila. Una posible solución es colocar los doce –1 en todas las casillas, excepto en una diagonal donde pondremos cuatro +1.
  En el caso de un cuadrado n x n, el **mínimo número** de –1 será **n**, ya que tiene que haber al menos un –1 en cada fila. Como en el caso particular anterior, una posible disposición se obtiene colocándolos en una diagonal.
  La **máxima cantidad** dependerá de la paridad de n.
  a) Si n es impar será n^2, pues todas las casillas pueden estar ocupadas por –1.
  b) Si n es par, al menos debe haber un +1 en cada fila, por lo tanto, el número máximo de –1 será $n^2 - n$. Una posible solución será colocar los +1 en una diagonal

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - CON LA MÚSICA A OTRA PARTE**

  Basta con apretar uno solo, el etiquetado con B-M. Si suena una melodía de Mozart sabemos que en que está etiquetado con B no puede sonar Beethoven por lo que será el que suena al azar, sonando en la etiqueta M Beethoven.

Si en B-M suena Beethoven el razonamiento es el mismo.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - DIVIDIENDO UN HEXÁGONO**

Es posible hacer una tabla con los primeros casos:

n (longitud del lado)	**Número triángulos**
1	**6**
2	**24**
3	**54**
4	**96**
......	**......**
n	**$6n^2$**

El caso general se puede calcular del siguiente modo:
Las tres diagonales del hexágono lo dividen en seis triángulos equiláteros grandes. Cada uno de ellos está formado por $1 + 3 + 5 + 2n-1 = n^2$ triángulos equiláteros de los que queremos contar.

<u>**Por lo tanto el número total será $6n^2$**</u>

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - ECHAR EL RESTO**

Calculamos el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, siendo este 60.El resto de la división de 60 por 2, 3, 4, 5 y 6 es cero, por ello, 50-1=59 cumple la condición. Falta únicamente comprobar si es el menor, para ello construimos la tabla siguiente:

	k=1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
6k+5	**11**	**17**	**23**	**29**	**35**	**41**	**47**	**53**
Resto entre 5	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
Resto entre 4				**1**				

La única opción de resto 4 al dividir por cinco lo únicos valores posibles es 29, pero al dividir 29 entre 4 el resto no es 3.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - SIETE PUNTOS**

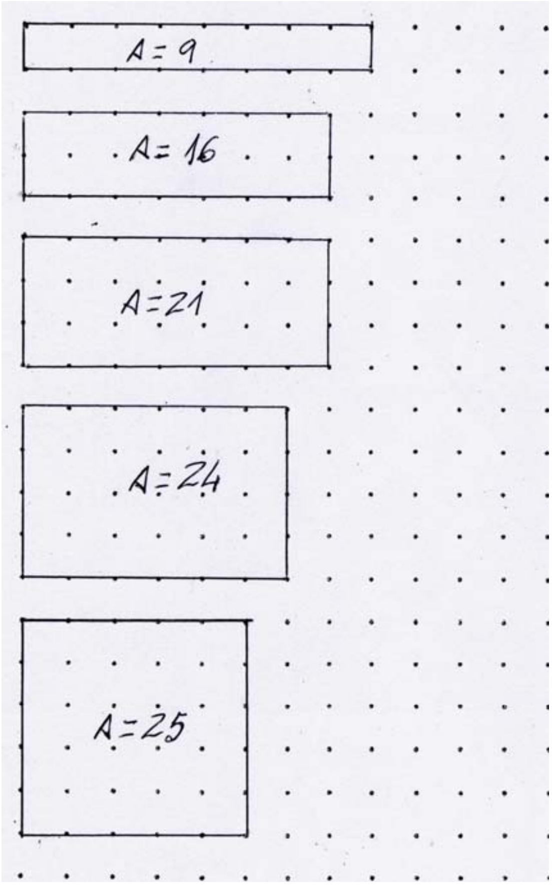
Este problema es en apariencia sencillo, sin embargo no es tan simple y, para resolverlo vamos a tener que recurrir a algunas estrategias de resolución de problemas.
Para abordarlo es conveniente que:
a) Primero vamos a suponer que de los puntos que nos dan nunca se encuentran tres de ellos alineados. También hemos de tener claro cómo queda definido un triángulo o un cuadrilátero en el plano y de que sólo vamos a contar los triángulos y cuadriláteros definidos con los puntos dados como vértices.
b) dibujes un diagrama de la situación. Por ejemplo, sitúa los puntos como vértices de un polígono y prueba.
c) ESTRATEGIA: Imagínate un problema parecido pero más sencillo. Cambia los siete puntos por: 3, 4, 5, 5, 6, etc. Ahora el problema es bastante más abordable. Puedes incluso ir trazando los triángulos o cuadriláteros e irlos contando. Puedes hacer una tabla con los resultados que vas obteniendo.
Por último, intenta generalizar los resultados que obtengas.

Nº de puntos	3	4	5	6	7	...	n
Nº de triángulos	1	4	10	20	35	...	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3*2*1}$
Nº de cuadriláteros	0	1	5	15	35	...	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4*3*2*1}$

¿Te atreverías a continuar, variando algunas de las condiciones que hemos impuesto en un principio: alineación de los puntos y determinación de los triángulos y cuadriláteros sólo por los puntos dados?

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - JARDINES**

Para resolver este problema conviene entregar a los alumnos tramas cuadradas de puntos para que representen con tendencia a ser ordenados y sistemáticos todos los casos que van saliendo. Como complemento puede sugerirse que representen todas las posibilidades en unos ejes de coordenadas cartesianas.



La heurística de representar los datos en una tabla también resulta muy útil:

Largo (metros)	9	8	7	6	5	4	3
Ancho (metros)	1	2	3	4	5	6	7
Área (m^2)	9	16	21	24	**25**	24	21
Tendencia.		Más	Más	Más	Más	Menos	Menos

Si se comprueba con otros números comprendidos entre el 4 y el 6, se puede apreciar que la mayor área es 25.

En este problema es interesante destacar que entre todos los rectángulos de perímetro dado, el cuadrado es el que encierra la mayor área.

En la 2ª parte del problema (cuando ya cuentan con una valla de 20 metros de un antiguo jardín), la mejor solución sería la de un lado de 10 metros y los otros dos restantes de 5 metros.

En los dos casos, se trata de funciones que no son monótonas. En esta ocasión, crece hasta que el lado es 10 metros y luego decrece.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) - PIRATAS DEL CARIBE**

Como mcd(17,16) = 1, el número mínimo de monedas es el mcm (17, 16) + 1 = 273. Por supuesto, 1 moneda también es solución, pero la descartamos al pedir que el número sea mayor que 100.
Ahora bien, 13 | 273, por lo que morirán al menos 4 piratas (lo de al menos, si es que no se conforman con 21 monedas de oro cada uno

- **Solución - Fase 2 - (12/14) - CAZA CARTESIANA**

Si el tablero fuera más pequeño, por ejemplo 2x2, estará muy claro quien va a ganar. Será el 1º que juegue, suponiendo que juegue inteligentemente.

Las posiciones indicadas con G son ganadoras.

G	
G	*G*

En un tablero de 3x3 las posiciones señaladas con P son perdedoras. El jugador que recibe el juego con la ficha en P, pierde seguro.

P	G	
1?	G	G
2?	3?	P

Son ganadoras o perdedoras las posiciones 1? 2?, 3? El que recibe el juego con la ficha en 1, puede dejarle al contrario la ficha en P. Por tanto, (igual que 3?) es G.

P	G	
G	G	G
2?	G	P

Podemos ir rellenando el siguiente cuadro. ¿Es 2 ganadora o perdedora? De 2 sólo se puede llegar a posiciones ganadoras para el contrario. Por tanto 2 es P, perdedora.

P	*G*	
G	*G*	*G*
P	*G*	*P*

Ampliando el cuadro para 8x8

De esta forma podemos saber que el que sale gana seguro, si juega bien, pues tiene una estrategia: llevar la ficha a una posición P. Siempre puede, pues el cuadro se ha rellenado precisamente así: de una G se puede llevar la ficha a una P. Y además está seguro de que el otro, desde P, no tiene más remedio que dejarle a él la ficha en G, pues las P así se han formado. En resumen:

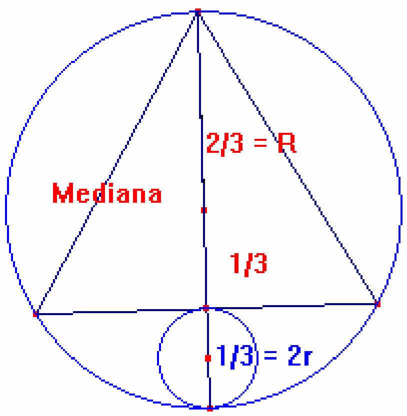
Una celda es G cuando desde ella se va directamente a la victoria o bien desde ella se puede ir a una P

Una celda es P, cuando desde ella sólo se puede ir a celdas G.

G	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***	*G*	
G	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*
G	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***
G	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*
G	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***
G	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*
G	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***	*G*	***P***
G	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - CÍRCULOS Y TANGENCIAS**

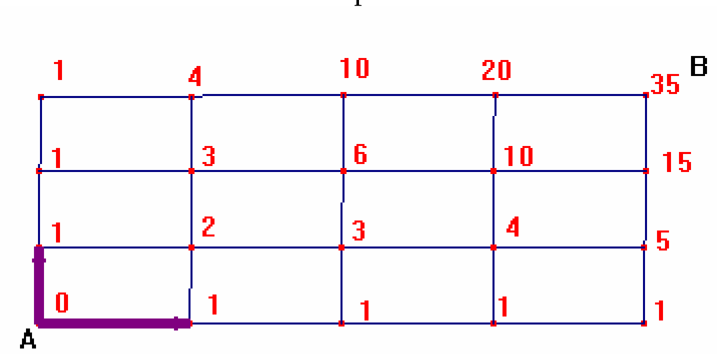
En un triángulo equilátero todas las rectas y puntos notables coinciden.



Sabemos que en la mediana la distancia del baricentro al vértice es el doble que la distancia al lado.
En el triángulo equilátero coinciden el centro de la circunferencia mayor (circuncentro) con el baricentro, por lo que 2/3 de la mediana será el radio de la circunferencia mayor (**R**) ,.Por tanto la distancia del baricentro del triángulo, y centro de la circunferencia mayor, al lado más el diámetro de la circunferencia menor será igual a l radio de la circunferemcia mayor ,que como ya hemos visto este mide 2/3 de la mediana, y como la otra parte de la mediana es igual a 1/3 de la misma, el diámetro (2r) de la circunferencia pequeña debe ser tambien 1/3 de la mediana.
De donde **R= 4r**

- **Solución - Fase Final - (12/14) - EL CAMINO**

  Para ir del punto A al B Letizia sólo puede avanzar hacia arriba y hacia la derecha (suponemos que no retrocede).
  Una forma sencilla de calcular cuantos caminos hay es ver de cuantas formas se puede llegar a una intersección.
  Para calcularlas basta con sumar los caminos posibles de los vértices adyacentes al punto en dirección abajo e izquierda, partiendo del punto A al que asignamos el valor 0.
  Así obtenemos 35 caminos posibles



OTRA FORMA DE ABORDAR EL PROBLEMA

Letizia para ir de A a B tiene que desplazarse tres veces hacia arriba $\uparrow$ y cuatro veces hacia la derecha $\rightarrow$.

Para saber todos los caminos distintos que puede hacer podemos contarlos teniendo en cuenta que nos importa el orden en que tome las dos posibles direcciones:

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow$ sería el primer camino señalado como ejemplo

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow$ otro camino, y así sucesivamente...

Usando combinatoria es un caso de Permutaciones con repetición:

$$PR_7^{4,3} = \frac{7!}{4!.3!} = 35 \text{ caminos posibles}$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) - LA ESCULTURA**

Piso	**Caras totales**	**Caras ocultas**	**Caras al descubierto**
Superior	6	1 por contacto con el piso medio	5
Medio	24	8 por contacto entre los cubos del piso 4 por contacto con el piso inferior 1 por contacto con el piso superior	11
Inferior	54	24 por contacto entre los cubos del piso 9 por contacto con el suelo 4 por contacto con el piso medio	17
			Total 33

Como cada cara tiene 1 m^2 de superficie debe pintar 33 m^2

- **Solución - Fase Final - (12/14) - ASAMBLEA DE SOCIOS**

Por las respuestas a las dos preguntas sabemos que hay de los dos tipos de socios SV y SM,
Por la respuesta a la segunda pregunta sabemos también que un socio SM debe tener necesariamente a su izquierda un socio SV; y un socio SV tiene que tener a la fuerza a su izquierda un socio SM.
Al ser la mesa circular los socios SM y SV están en igual número, por lo tanto a la asamblea del club “Veritas” asistieron un número par de socios, o sea cuarenta.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - CUADRADOS Y DIAMANTES**

Este es sin duda un buen problema para proporcionar a los estudiantes experiencias de modo que practiquen la realización de tablas en donde expresar sistemáticamente lo que tiene y puedan buscar pautas que les ayuden a entender la situación y generalizar:

PASOS	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
CUADRADOS	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**
DIAMANTES	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**

En los pasos impares hay igual número de cuadrados que de diamantes.
En los pasos pares hay un cuadrado más que diamantes.
El número total (cuadrados + diamantes) es siempre uno más que el nº del paso en que nos encontramos.
a) Así pues, en el caso del paso 10 habrá 11 figuras y como es par, un cuadrado más que diamantes. **Por lo tanto serán 6 cuadrados y 5 diamantes.**
Si continuáramos con el modelo, en el paso 100 habrá **101 figuras: 51 cuadrados y 50 diamantes.**

Sea x el número de pasos. Si x es par habrá $1+\frac{1}{2}x$ cuadrados y $\frac{1}{2}$ x diamantes. Si x es impar hay $\frac{1}{2}$ (x+1) cuadrados y el mismo número de diamantes.

b) La región central es blanca cuando el número de pasos es par y negra cuando este número es impar.
En el paso 10 es blanca (cuadrado) y en el 67 ha de ser negra (diamante).

c) Puede explicarse y llegar a justificar que la superficie de cada diamante es la mitad que la del cuadrado en que está inscrito. Los alumnos pueden comprobarlo cortando un cuadrado y doblando por las esquinas.
Siempre hay más negro que blanco.
Si vamos sumando las superficies blancas por un la lado y por otro, las negras veríamos que 2/3 de las superficie sería blanca.

d) BLANCOS: Al observar la serie vemos que en los pasos pares el número de triángulos blancos se obtiene multiplicando el nº del paso por dos (dos en el 4, tres en el 6,...) y si el paso es impar como ocurre con el tres, hay dos triángulos más.
Generalizando. Si x es el nº de pasos, cuando sea par habrá 2x triángulos blancos y cuando sea impar habrá 2 (x+1).
NEGROS: cuando el nº de pasos es par hay 2x triángulos negros y cuando es impar 2(x-1). Esto es así porque en cada paso se añaden 4 triángulos negros, empezando por el paso 2.

En problemas como este, el profesor debería animar a los estudiantes a escribir **VARIANTES** del problema, educándoles para que se planteen preguntas como ¿QUÉ PASARÍA SI...?. Ejemplos:
¿Qué pasaría si en lugar de colorear de blanco y negro, se usasen tres, cuatro,... colores?
¿Qué pasaría si en vez de unir puntos medios de cuadrados, se tratase de triángulos, pentágonos, hexágonos,...?.
¿Qué pasaría si en lugar de unir puntos medios, eligiésemos puntos a 1/3 de cada lado? (El primer tercio se cuenta en el sentidote las agujas del reloj....

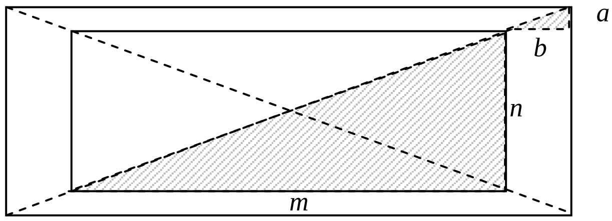
ç

Solución - Fase 1 - (14/16) - LA CUERDA QUE CUADRA

a longitud $\frac{1}{8}$ es de metro, ya que la longitud total de la cuerda

aumenta 1 metro, que se reparte en ocho ampliaciones, dos por cada vértice.

por semejanza de triángulos tenemos



$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ que, además,

como 4a + 4b=1, despejando en la primera de las ecuaciones y sustituyendo en la segunda obtenemos el resultado, que es:

$$a = \frac{n}{4(m+n)} \quad \text{y} \quad b = \frac{m}{4(m+n)}$$

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - CASAS DE CUTRO CUBOS**

En relación con este problema, se recomienda a todos los profesores la lectura del artículo de Hans Freudenthal "Casas de cuatro cubos" en el que cuenta lo que sucedió cuando propuso este problema a estudiantes del tercer grado. El artículo ofrece pautas sobre como los profesores deben conducir una investigación matemática en cualquier nivel de enseñanza.

Para las primeras fases de planteamiento del problema sería conveniente disponer de cubos engarzables Multilink^{R}. La importancia del material depende de la madurez de los alumnos.

Al resolver este problema puede hacerse referencia a otro como el "Salto de la rana" señalando que uno de los elementos importantes para hallar la solución es encontrar una notación adecuada para registrar los movimientos.
En clase puede iniciarse una discusión sobre qué casas pueden considerarse las mismas qué casas diferentes, por ejemplo preguntando a los alumnos si han construido una casa igual a alguna de las expuestas. En el ejemplo siguiente

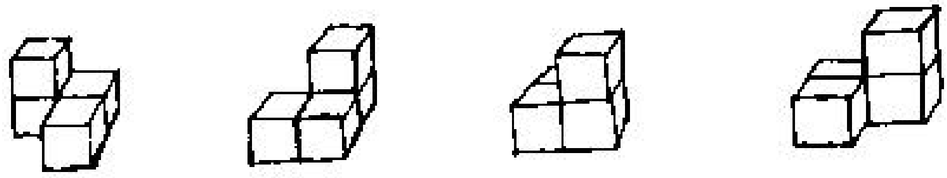
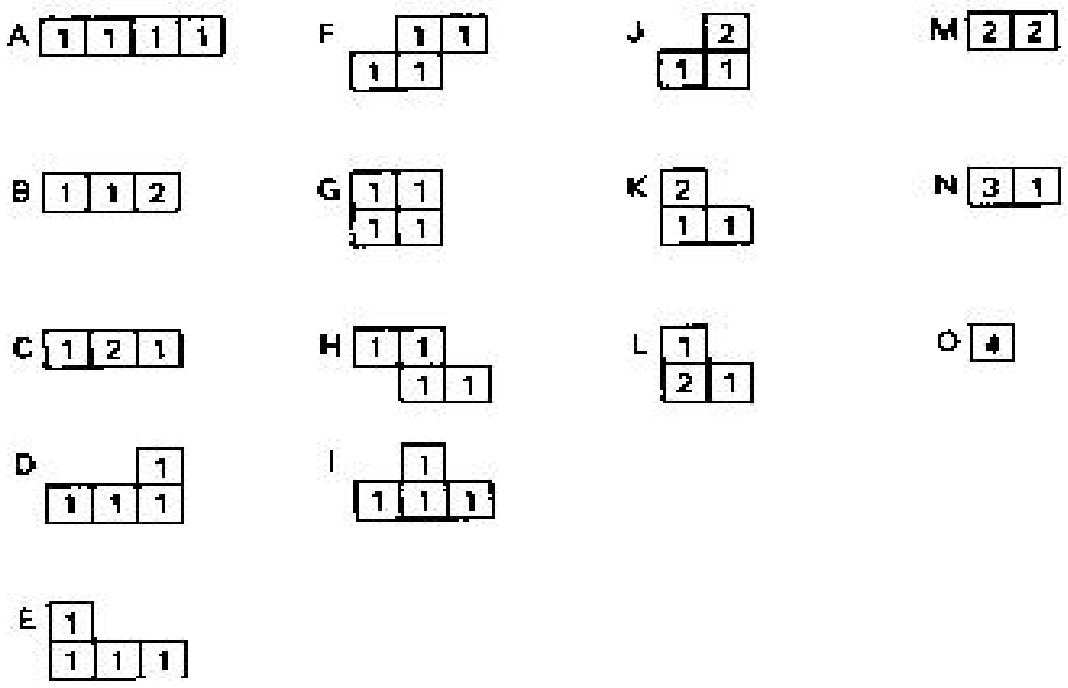


Figura 1a Figura 1b Figura 1c Figura 1d

las casas de las figuras 1ª, 1b, y 1c son las mismas, pero no iguales a la de la figura 1d.

PAUTAS DE ACTUACIÓN EN ESTE PROBLEMA

- Hacer notar que dos casas son iguales si una se puede transformar en otra mediante rotaciones alrededor de ejes verticales
- Dibujar las casas es bastante difícil, por tanto es necesario buscar una forma eficaz para representarlas. Resulta muy útil utilizar tramas de puntos isométricas. Una manera de representar las casas es dibujar la planta y escribir cuántos cubos hay sobre cada cuadrado. Usando este sistema las 15 casas posibles son:



Presupuesto de las casas

Fijándose en como han puesto las tarifas, vemos que la diferencia de precio entre las casas se debe a la superficie total del cuerpo formado por los cuatro cubos.

- Todas las casas cuestan lo mismo excepto las G y M de la figura anterior, que son 2.000 € más baratas.

- Algunos hacen los cálculos directamente, pero debemos hacerles ver que el precio será el mismo para todas las casas que son geométricamente congruentes (por rotaciones o simetrías).
- El precio de una casa se calcula rápidamente teniendo en cuenta que el número de paredes internas o tabiques y de suelos distintos del de la planta baja. Ejemplo: los cuatro cubos de la casa L tienen 24 caras, 6 de ellas son tabiques o suelo. El precio de la casa es por lo tanto de: 24.000 € - 6.000 € = **18.000 €.**
- En las casas G y M, debemos quitar 8 paredes comunes, por lo tanto a 24.000 hay que restarle 8.000. estas casas cuestan **16.000 €.**

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - CUESTIÓN DE PESO**

A la primera cuestión se puede contestar sencillamente diciendo que si hubiesen acudido en igual número el promedio debería ser

$$\frac{90+65}{2} = 77{,}5\ kg.$$

Si el promedio obtenido es menor es debido a que han acudido a la consulta más mujeres que hombres.

Para calcular la proporción hacemos lo siguiente:
Llamamos H a la suma de los pesos de los hombres y h al número de hombres que acudieron a la consulta. Llamamos M a la suma de los pesos de las mujeres y m al número de mujeres que se pesaron.

$\frac{H}{h} = 90$; H = 90h

$\frac{M}{m} = 65$;M = 65m

$\frac{90h+65m}{h+m} = 75$ $\frac{H+M}{h+m} = 75$; 90h + 65m = 75h +75m ; 15h = 10m

$\frac{15}{10} = \frac{m}{h}$ $\frac{m}{h} = \frac{3}{2}$ Por cada tres mujeres asistieron dos hombres

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - SIMPLIFICACIÓN**

Como tengo que buscar otros números que cumplan esta propiedad, lo que necesito es GENERALIZAR este resultado a otros números. ¿Habrá otros números?

En estos casos casi siempre es necesario usar álgebra:

Expreso de manera general lo que yo quiero buscar:

Para que valores de a, b y c se cumple que el numero de dos cifras ab/bc da como resultado el numero a/c donde he simplificado indebidamente el numero b en numerador y denominador.

Es decir trato de resolver la ecuación: $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ que expresaremos de esta manera:

$$\frac{10 \cdot a + b}{10 \cdot b + c} = \frac{a}{c}$$

(10.a+b).c=(10b+c).a ; 10 ac + bc=10 ba +ac ; 9 ac=10 ba –bc

Parece poco convincente que se pueda resolver una sola ecuación con tres incógnitas, si no me doy cuenta de que esta sometida a unas restricciones muy fuertes:(Es en este momento donde, quizás, se necesita la intervención del profesor sobre todo para animar y centrar al alumno en el problema)

1. Las posibles soluciones de las incógnitas a, b y c, deben de ser número Naturales.

2. Además deben de ser los dígitos del 1 al 9, no vale el 0, ni para la a, porque el numerador no sería un nº de dos cifras, ni para la b ocurriría lo mismo con el denominador, ni para la c la fracción final no tendría sentido.

3. El nueve que me ha aparecido en el primer término de la ecuación seguro que me podrá ayudar.

Escribiré la ecuación de esta manera:

$$3^2 \cdot a \cdot c = b \cdot (10 \cdot a - c) \qquad \textbf{[1]}$$

Llegado a este punto, quizás, me haya dado cuenta que este problema tiene nueve soluciones que voy a llamar **soluciones triviales** que se producen cuando a=b=c. la ecuación entonces se transforma en $9.a^2=9.a^2$, que se cumple para todos los posibles valores de a desde 1 a 9,

Por tanto ya tengo nueve soluciones:

11/11, 22/22 , 33/33 , 44/44 , 55/55 , 66/66 , 77/77 , 88/88, 99/99

Ahora voy a intentar resolver la ecuación [1] teniendo en cuenta que el primer término es el producto de tres factores: 9, a y c, y el segundo término es el producto de b por (10.a-c). El segundo término debe de contener en algún lugar los dos treses que aparecen en el primer término correspondientes al 9.

Esto puede ocurrir de estas formas diferentes:

a) Si b=9

b) Si b= 3, es decir contiene un tres , el otro estará en (10.a-c).

c) Si b=6, también la b contiene el factor 3.

d) Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, entonces (10.a-c) tiene que ser múltiplo de nueve.

- PRIMER CASO b=9 entonces: a.c=10.a-c y $c = \frac{10 \cdot a}{a+1}$

Como c tiene que ser nº Natural se obtienen las soluciones:

Para a=1 entonces c=10/2=5 y tengo otra solucion: a=1, b=9 y c=5 $\Rightarrow \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$

Para a= 4 entonces c= 40/5= 8 otra solución: a=4, b= 9 y c=8 $\Rightarrow \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$

Para a=9 entonces c=90/10=9 y esto me lleva a una de las soluciones triviales que ya tengo a=9, b=9 y c=9

- SEGUNDO CASO b=3 entonces 3.a.c= 10.a-c y $c = \frac{10 \cdot a}{3 \cdot a + 1}$

Puedo escribir todos valores de c, para cada valor de a, aunque no es difícil razonar que no se va a encontrar solución excepto para a=3

Si a = 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Entonces c = 10/4 20/7 30/10 40/13 50/16 60/19 70/22 80/25 90/28

Y solo se obtiene un valor entero para c=30/10=3 que corresponde a la solución trivial a=3, b=3 y c=3.

- TERCER CASO b=6 entonces 3.a.c=20.a-2.c y $c = \frac{20 \cdot a}{3 \cdot a + 2}$

Y escribo los valores de c para cada a:

Si a = 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Entonces c= 20/5 40/8 60/11 80/14 100/17 120/20 140/23 160/26 180/29

Que nos lleva a otras soluciones: a=1 $\Rightarrow \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ c=4 y b=6 la solución del enunciado.

Para: a=2, c=5 y $\Rightarrow \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$ b=6

Para a=6, c=6 y b=6 me lleva a una solución trivial que ya conocemos.

- CUARTO CASO Si b no contiene un factor 3, entonces 10.a-c tiene que contener el factor 9, es decir ser múltiplo de 9.

Pero los múltiplos de nueve son:

9=10-1 ; 18=20-2 ; 27=30-3 ; 36=40-4 ; 45= 50-5 ; 54= 60-6 : 63=70-7

72=80-8; 81= 90-9

en todos los casos tiene que ser a=c, lo cual implica que a=b. Por tanto esta posibilidad solo me conduce a las soluciones triviales a=b=c.

He obtenido 4 soluciones distintas de la solución trivial y que incluyen la solución del enunciado.

$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$	$\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$	$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$	$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$

XV OLIMPIADA

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - EL DELEGADO**

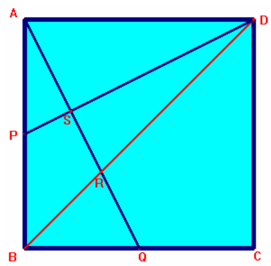
El primero de la lista tendrá probabilidad ½.
El segundo será delegado si no es el primero y si le sale cara, por tanto $(1/2).(1/2) = (1/2)^2$
Así se llega a la fórmula.
No todos tienen la misma probabilidad de ser delegados.
Puesto que nadie quiere presentarse, lo habrá propuesto el que menos probabilidad tenga de ser elegido, es decir, Serrano.
$(1/2)^{20} = 0{,}00000095367431640625 = 9'5367431640625 \,.10^{-7}$
Como $(1/2)^{10} = 0{,}0009765625 = 9'765625.\ 10^{-4}$, ocupará el décimo lugar.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) - RESTAR DIVISORES**

SOLUCIÓN:
Ganará el jugador que consiga como resultado de su resta el número 1, ya que el siguiente jugador sólo podrá restar 1 y obtendrá cero, perdiendo así la partida.
<u>Si el número es par:</u>
El primer jugador ganará si elige siempre un divisor impar del número (todo número tiene al menos un divisor impar, el 1). Obtiene en su resta un número impar, que no tendrá divisores pares, lo que obliga al segundo jugador a elegir un divisor impar, obteniendo de este modo una resta par. El primer jugador conseguirá pues dejar como resultado de una de sus restas el número 1
<u>Si el número es impar:</u>
El primer jugador tendrá que elegir un divisor impar y obtendrá como resta un número par. En este caso, siguiendo el razonamiento anterior, ganará el segundo jugador eligiendo siempre divisores impares de los números.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) - UN REPARTO GEOMÉTRICO**

Llamemos R al corte de las líneas BD y AQ. Y S al corte de las líneas PD y AQ.
Observemos primero las semejanzas existentes. Son semejantes los triángulos: APD, APS y ASD. También son semejantes BRQ y ARD



Comencemos calculando el área de APD, como es un triángulo de base 60 y altura 120 su área es (120·60)/2=3600 Además este triángulo verifica que su altura es el doble de la base, por lo tanto todos los triángulos semejantes con él tienen la misma relación.
Por lo tanto AS=2·PS y su área, que sería $(AS\cdot PS)/2 = (PS)^2$.
Además, por ser triángulos rectángulos, $(AP)^2 = (PS)^2 + (AS)^2$, luego, $(AP)^2 = 5\,(PS)^2$ y $(AP)^2$ es el área del triángulo APD, por lo

tanto el área del triángulo APS es 3600/5=720 m^2 . Y el área de ASD es el área de APD - área de APS =3600-720 = 2880 m^2.
Como los triángulos BRQ y ARD son semejantes y el lado AD es el doble de BQ, la altura de ARD es el doble de la altura h de BRQ. De donde h+2h=120, por lo tanto h es 40 y el área de BRQ es 60 -· 40/2=1200 y el área de ARD es 120·80/2= 4800 m^2.
Como SRD =ARD - ASD entonces el área de SRD es 4800 - 2880 = 1920 m^2.
Veamos a continuación las áreas de los cuadriláteros. El área del cuadrilátero es BRSP = ABQ - APS – BQR y como ABQ = APD, entonces BRSP = 3600 - 720 - 1200 = 1680. Y el área de RQCD = BCD - BRQ y el área de BCD es 120·120/2= 7200, entonces RQCD = 7200 - 1200 = 6000. Por lo tanto tenemos que las áreas son las que se reflejan en el dibujo. Y el reparto sería:
1.- Para la madre el cuadrilátero RQCD de 6000 m^2 .
2.- Para el primer hijo el triángulo ASD de 2880 m^2 .
3.- Para el segundo hijo el triángulo SRD de 1920 m^2.
4.- Para el tercer hijo el cuadrilátero PBRS de 1680 m^2.
5.- Para el cuarto hijo el triángulo BQR de 1200 m^2.
6.- Para el quinto menor el triángulo APS de 720 m^2

- **Solución - Fase 2 - (14/16) - NÚMEROS DE LUCAS**

ORDEN	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
Nº LUCAS	1	3	4	7	11	18	29	47	76
SUMA		4	8	15	26	44	73	120	
C. IMPARES			5		16		45		
D. PARES				10		28		75	

1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,322,521,843,1364, 2207.
$L_1+L_2+...L_n = L_{n+2} - 3$.
$L_1 + L_3 + ... + L_{2n-1} = L_{2n} - 2$.
$L_2 + L_4 + ... L_{2n} = L_{n+2} - 1$.
El tercero, el sexto, el noveno,... esto es, los números que ocupan lugares que son múltiplos de 3, son pares.

- **Solución - Fase Final - (14/16) - A LA RODA A POR UVAS**

Sean 2S y S las superficies a vendimiar. Tres medias cuadrillas durante un día vendimian el viñedo grande completo (2S) por lo que cada media cuadrilla hace en medio día un trabajo equivalente a 2S/3.
En el viñedo pequeño trabaja una media cuadrilla durante medio día por lo que realiza un trabajo de 2S/3 y queda por hacer de ese viñedo

pequeño: S-2S/3= S/3

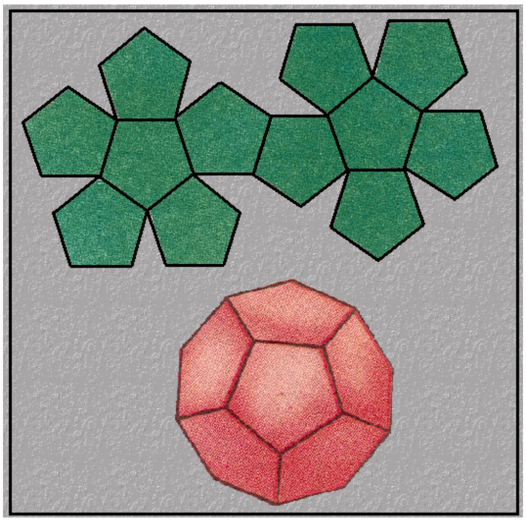
Esta cantidad es precisamente la que tendrá que realizar al día siguiente una sola persona. Así pues tenemos que el trabajo a lo largo de un día completo realizado por TODOS los trabajadores fue 3S (superficie total a vendimiar) menos lo que falta (S/3) para el día siguiente, es decir

3S-S/3= 8S/3.

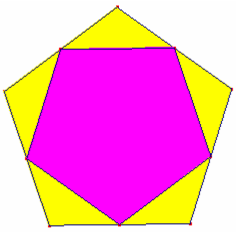
Así pues:

Número de trabajadores = (trabajo que realizan todos los de la cuadrilla en un día) / (trabajo que realiza un solo trabajador en un día) = (8S/3)/(S/3) = 8 trabajadores por cuadrilla.

- **Solución - Fase Final - (14/16) - HOMENAJE A SALVADOR DALÍ**



El dodecaedro tiene 20 vértices de orden tres (confluyen tres pentágonos en él) por lo que al truncarlos por los puntos medios de los lados del pentágono, aparecerán 20 nuevas caras triangulares, y seguirá habiendo 12 pentágonos pero de menor tamaño, por lo que el número de caras pasa a ser de 32



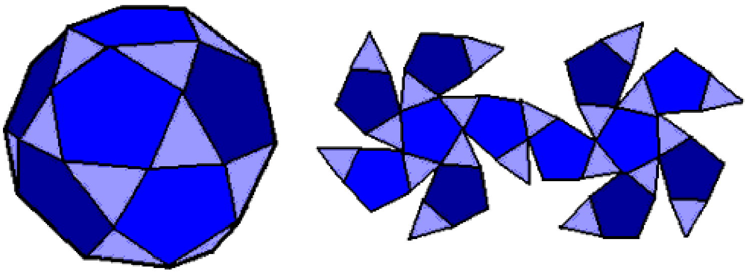
El número de aristas es muy sencillo de hallar, como en cada una confluyen dos lados, dividimos el número total de lados por dos y obtenemos 60 aristas

Polígono	Lados	Número	Total
Pentágonos	5	12	60
Triángulos	3	20	60
			120

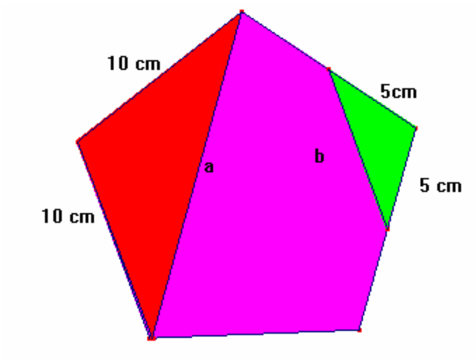
Para los vértices podemos usar la fórmula de Euler Sustituyendo C = 32, A = 60 resulta V = 30

C +V = A +2

ICOSIDODECAEDRO



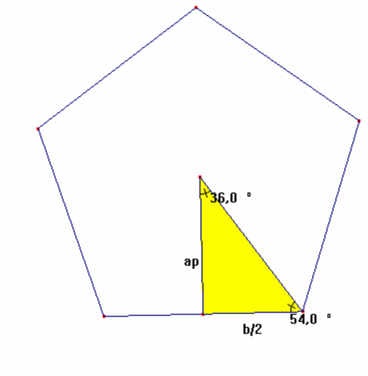
Caras	Vértices	Aristas
32	30	60



Para calcular la superficie del polígono necesitanos saber cuanto mide el nuevo lado b.
Como el pentágono es regular, el triángulo rojo y el verde son semejantes.

Como dato nos dicen que $\frac{a}{10} = \phi$; por ser semejantes $\frac{b}{5} = \phi$;

$b = 5\phi \ cm$

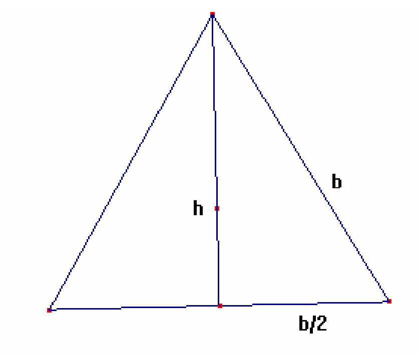


Utilizando trigonometría:

$$tg54^\circ = \frac{ap}{b/2} \ ; \ ap = \frac{tg54^\circ.b}{2}$$

La superficie del pentágono será por tanto:

$$S = \frac{P.ap}{2} = \frac{5b.tg54^\circ.b}{2} = \frac{5.tg54^\circ}{2}b^2$$



El área de un triángulo equilátero es $S = \frac{b..h}{2}$, pero h por Pitágoras es $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$; de donde $S = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

Sustituyendo valores

XV OLIMPIADA

Polígono	Cantidad	Totales
Pentágono	12	2702.56 cm^2
Triángulo	20	1133.64 cm^2
		3836.20 cm^2

- **Solución - Fase Final - (14/16) - JUGADORAS**

DADO	RULETA	
	Posibilidades de que salga entero	**Posibilidades de que salga decimal**
1	37 (todas)	0
2	19 (desde 2 por 0 a 2 por 18)	18
3	13 (desde 3 por 0 a 3 por 12)	24
4	10 (desde 4 por 0 a 4 por 9)	27
5	8 (desde 5 por 0 a 5 por 7)	29
6	7 (desde 6 por 0 a 6 por 6)	30

Habrá, por tanto, 94 posibilidades de que vaya a las Vegas Tina frente a 128 de que vaya Petri