Oppikirjamaraton-tiimi

Vapaa matikka 1

Matikka verkosta vapauteen!

Kirjasta puuttuu vielä muun muassa kuvitusta, yhtenäistämistä ja muita loppumetrien toimituksellisia temppuja. Kerro meille mitä kirjassa pitäisi parantaa! Helpoiten tämä onnistuu lisäämällä parannusehdotuksen osoitteessa `https://github.com/linjaaho/oppikirjamaraton-maa1/issues` ja klikkaamalla "New Issue" (vaatii rekisteröitymisen GitHubiin).

MAA1 – Funktiot ja yhtälöt

Oppikirjamaraton - tätä lukee kuin avointa kirjaa!
Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0 -lisenssillä.

Metasivu

Projektin nimi: Oppikirjamaraton

Kirjan LaTeX-lähdekoodi:
`https://github.com/linjaaho/oppikirjamaraton-maa1`

Versio: 0.92 lähdekoodi ajettu 25. lokakuuta 2012
Ensimmäinen julkaistu versio (0.9) kirjoitettiin viikonlopun 28.–30.9.2012 aikana. Kirjaa on jatkokehitetty sen jälkeen ja uusi versio julkaistaan aina, kun edistystä on tapahtunut riittävästi.

Lisenssi: CC BY 3.0 (`http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/legalcode`)
Sinulla on vapaus:

1. jakaa — kopioida, levittää, näyttää ja esittää teosta
2. remiksata — valmistaa muutettuja teoksia
3. käyttää teosta kaupallisiin tarkoituksiin

Seuraavilla ehdoilla:

1. nimeä — Teoksen tekijä on ilmoitettava siten kuin tekijä tai teoksen lisensoija on sen määrännyt (mutta ei siten että ilmoitus viittaisi lisenssinantajan tukevan lisenssinsaajaa tai Teoksen käyttötapaa)

Määräys lisäyksenä lisenssiin: kaikkien tekijöiden nimet on ilmoitettava jossakin kohtaa kirjaa. Nimet löytyvät liitteestä G.

Tue tekijöitä ja avointen oppimateriaalien luomista!

Flattr

http://flattr.com/t/914482

Bitcoin

bitcoin:148pMeTViRMFBqMVZRnMZ6Hwccq9WTubq1?label=Oppikirjamaraton

Lisätietoja kirjasta

Kirjan virallinen kotisivu: http://avoinoppikirja.fi
Oppikirjamaraton Facebookissa: http://facebook.com/oppikirjamaraton
Oppikirjamaraton IRCnetissä: #oppikirjamaraton

Sisältö

0 Esipuhe **7**

I Luvut ja laskutoimitukset **9**

1 Numerot ja luvut **10**

2 Kokonaisluvut **15**

3 Rationaaliluvut **26**

4 Potenssi **33**

5 Desimaaliluvut **40**

6 Juuret **46**

7 Murtopotenssi **51**

8 Reaaliluvut **54**

9 Kertaus **58**

II Yhtälöt **59**

10 Yhtälö **60**

11 Ensimmäisen asteen yhtälö **64**

12 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus **67**

13 Prosenttilaskenta **71**

14 Potenssiyhtälöt **77**

15 Kertaus **82**

III Funktiot 83

16 Funktio **84**

17 Koordinaatisto ja funktion kuvaaja **88**

18 Potenssifunktio **91**

19 Eksponenttifunktio **94**

20 Kertaus **98**

IV Kertaustehtäviä 99

21 Harjoituskokeita **100**

22 Ylioppilaskoetehtäviä **102**

23 Pääsykoetehtäviä **106**

Liitteet 112

A Lähtötasotesti **113**

B Yksiköt ja vastaustarkkuus **115**

C Laskusääntöjen todistuksia **121**

D Syventävää sisältöä: logiikka ja joukko-oppi **124**

E Syventävää sisältöä: reaalilukujen aksioomat **125**

F Ratkaisut **128**

G Sanasto **140**

H Tekijät **142**

Luku 0 Esipuhe

Matematiikka tarjoaa työkaluja asioiden täsmälliseen jäsentämiseen, päättelyyn ja mallintamiseen. Alasta riippuen käsittelemme matematiikassa erilaisia **objekteja**: Geometriassa tarkastelemme kaksiulotteisia **tasokuvioita** ja kolmiulotteisia **avaruuskappaleita**. Algebra tutkii **lukualueita** ja niissä määriteltäviä **laskutoimituksia**. Todennäköisyyslaskenta tarkastelee satunnaisten **tapahtumien** esiintymistä. Matemaattinen analyysi tutkii **funktioita** ja niiden ominaisuuksia, esimerkiksi **jatkuvuutta**, **derivoituvuutta** ja **integroituvuutta**. Matemaattista analyysiä käsittelevät pitkässä matematiikassa kurssit 7, 8, 10 ja 13 sekä osin kurssit 9 ja 12. Voidaankin sanoa, että analyysi on keskeisin aihealue lukion pitkässä matematiikassa.[1]

Jokaiseen tarkastelukohteeseen liitetään myös niille ominaisia **operaatioita**. Tämä kurssi käsittelee lähinnä lukuja ja niiden operaatioita eli laskutoimituksia. Tässä kirjassa esittelemme luvun käsitteen ja yleisimmin käytetyt lukualueet laskutoimituksineen, ja jatkamme niistä **yhtälöihin** ja funktioihin.

Uusimpien (vuoden 2003) lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa yhtälön ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan,
- syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään,
- tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä,

1. Tämä Suomessa käytetty lähestymistapa on käytössä monissa länsimaissa. Sen sijaan esimerkiksi Balkanilla geometrialle ja matemaattiselle todistamiselle annetaan edelleen paljon suurempi painoarvo.

- syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita,
- ja oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä.

Opetussuunnitelman perusteet määrittelevät kurssin keskeisiksi sisällöiksi

- potenssifunktion,
- potenssiyhtälön ratkaisemisen,
- juuret ja murtopotenssin
- sekä eksponenttifunktion.

Kiitämme

- Metropolia AMK
- Tekniikan akateemisten liitto TEK
- Onnibus
- Kebab Pizza Service
- Heikki Hakkarainen
- Eveliina Heinonen
- Jokke Häsä
- Katleena Kortesuo
- Hannu Köngäs
- Senja Larsen
- Jussi Partanen
- Arto Piironen
- Antti Ruonala
- Anni Saarelainen
- Tiina Salola
- Kaj Sotala
- Paula Thitz
- Juhapekka "Naula" Tolvanen
- Daniel Valtakari
- Kaikki tärkeät tyypit, joiden nimi unohtui mainita!

Osa I Luvut ja laskutoimitukset

Luku 1 Numerot ja luvut

Ihmisillä ja eläimillä on luonnostaan matemaattisia taitoja. Monet niistä, esimerkiksi lukumäärien laskeminen, ovat monimutkaisia ajatusprosesseja, jotka kehittyvät lapsuudessa – toisilla aiemmin, toisilla myöhemmin. Koulussa opeteltava peruslaskento ja myös matematiikka tieteenalana rakentuvat tämän biologisen osaamisen päälle. Laskeminen itsessään on vain eräs matematiikan osa-alue, eikä kaikki matematiikka ole laskemista.

Huom.! laskea (lukumäärä) englanti count ruotsi _ /n laskea (laskutoimitus) englanti calculate , ruotsi _

Yleisesti lukujen merkitsemisestä

Laskutoimitusten ja muun matemaattisen pohdinnan merkitseminen kirjalliseen muotoon on taito, jonka oppiminen oli merkittävä askel ihmisen kehityshistoriassa. Aikojen saatossa eri kansat ovat käyttäneet erilaisia tapoja merkitä laskutoimituksia ja lukumääriä. Tunnettu esimerkki on roomalaiset numerot, jotka näyttävät hyvin erilaisilta nykyään käyttämiimme lukumerkintöihin.

Helpoin ja yksinkertaisin tapa merkitä lukumäärää on käyttää vain yhtä merkkiä ja toistaa sitä:

Piirrettynä ”tukkimiehen kirjanpitoa” ja vertaus arabialaisilla numeroilla

Kun käytettävissä olevien merkkien määrää lisää, suuria lukuja voi kirjoittaa lyhyempään muotoon. Tilanne on verrattavissa vaikkapa kiinan kieleen, jossa on käytössä satoja erilaisia kirjoitusmerkkejä. Merkeissä on paljon muistettavaa, mutta toisaalta kokonaisen lauseen voi kirjoittaa vain parilla kirjoitusmerkillä.

Roomalaiset luvut

Antiikin Roomassa käytössä olivat numeromerkit I, V, X, L, C , D ja M. Niiden numeroiden vastaavuudet meidän käyttämiimme lukuarvoihin ovat seuraavat:

$$\mathrm{I} = 1 \quad \mathrm{V} = 5 \quad \mathrm{X} = 10 \quad \mathrm{L} = 50 \quad \mathrm{C} = 100 \quad \mathrm{D} = 500 \quad \mathrm{M} = 1000$$

Lukuja koostetaan näistä merkeistä siten, että merkit kirjoitetaan peräkkäin pääasiassa laskevassa järjestyksessä ja niiden numeroarvot lasketaan yhteen. Jos arvoltaan pienempi numeromerkki (korkeintaan yksi) edeltää suurempaa, pienempi vähennetään suuremmasta ennen yhteenlaskun jatkamista.

Esimerkki 1. $\mathrm{XIV} = 10 + (5 - 1) = 14$

Roomalaisia numeroita käytetään usein myös nykyään merkitsemään esimerkiksi järjestystä.

Paikkajärjestelmä

Kun numeroista koostetaan lukuja, numeroiden kirjoitusjärjestyksellä on väliä. Esimerkiksi luvut 134 ja 413 eivät ole sama luku; saamme eri lukuja, kun numeroita yhdistellään eri tavoin. Käsityksiä siitä, miten numeron paikka vaikuttaa, luvun suuruuteen, kutsutaan *paikkajärjestelmiksi*.

Seuraava esimerkki selventää, miten roomalaiset muodostivat erilaisia lukuja numeromerkeistään.

Esimerkki 2.
- $\mathrm{III} = 1 + 1 + 1 = 3$
- $\mathrm{IX} = 10 - 1 = 9$

- XII$= 10 + 1 + 1 = 12$
- XIX$= 10 + (10 - 1) = 19$
- CDX$= 500 - 100 + 10 = 410$
- MDMC$= 1000 + (1000 - 500) + 100 = 1600$

Länsimaisessa traditiossa käytössämme on kymmenen numeromerkkiä: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Näitä kutsutaan alkuperänsä mukaan hindu-arabialaisiksi numeroiksi.

Englannin kielen sana *number* voi viitata sekä numeroon että lukuun. Sana *digit* tarkoittaa pelkästään yhtä numeromerkkiä. Ruotsiksi luku on *tal*, lukumäärä *antal* ja numeroa tai lukumäärää tarkoittamatonta numeroyhdistelmää kuvaa suomen kielen tapaan sana *nummer*.

Kirjoittamalla näitä numeromerkkejä peräkkäin ilmaisemme lukuja.

Esimerkki 3. Luku

$$715531$$

koostuu numeroista 7, 1, 5, 5, 3 ja 1. Luku

$$9$$

koostuu ainoastaan vastaavasta numeromerkistä 9.

Luvulla on aina suuruus mutta numerolla ei. Tämän vuoksi esimerkiksi arkipäivän käsitteet postinumero ja puhelinnumero eivät ole lukuja, vaikka niissä numeroita yhdistelläänkin. Emme voi esimerkiksi sanoa, onko postinumero 00950 jollakin tapaa suurempi kuin postinumero 00900.

Lukujärjestelmät

Järjestelmäämme merkitä lukuja kutsutaan *kymmenjärjestelmäksi*. Siinä kunkin numeron paikka kertoo, kuinka monta kymmentä, sataa, tuhatta ja niin edelleen numero vastaa.

Esimerkki 4. Luku 562 koostuu viidestä sadasta, kuudesta kymmenestä ja kahdesta ykkösestä, eli $562 = 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2$.

Luku 2010,23 koostuu kahdesta tuhannesta, yhdestä kymmenestä, kahdesta kymmenesosasta ja kolmesta sadasosasta. Desimaalimerkintöihin palataan tarkemmin Desimaaliluvut-osassa.

Kielioppihuomautuksia: 1) Tuhaterottimena käytetään välilyöntiä, ei pilkkua tai pistettä. 2) Suomessa on käytössä desimaalipilkku, ei -piste! Yhdysvaltalaiset ovat suunnitelleet laskimesi.

Kymmenjärjestelmää kutsutaan myös *desimaalijärjestelmäksi*, koska siinä hyödynnetään kymmentä eri numeromerkkiä. Muita yleisesti käytössä olevia järjestelmiä ovat 2-järjestelmä eli binäärijärjestelmä ja 16-järjestelmä eli heksadesimaalijärjestelmä, joita käytetään digitaalisen informaation tallentamiseen ja käsittelemiseen. Binäärijärjestelmässä luvun muodostavia numeromerkkejä kutsutaan biteiksi. Bitti voi olla joko päällä (1) tai pois päältä (0), ja toteutus tietokoneessa vastaa esimerkiksi sitä, että johtimessa kulkee virta (1) tai ei (0). Useampaa järjestelmää käytettäessä merkitään kantaluku luvun jälkeen alaindeksinä. Esimerkiksi luku yhdeksäntoista voidaan merkitä 19_{10}, 10011_2 tai 13_{16} käyttäen desimaali, binääri tai heksadesimaalijärjestelmää.

Esimerkki 5.

$$\begin{aligned} 19_{10} &= 1 \cdot 10 + 9 \\ 10011_2 &= 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + 0 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 0 \cdot (2 \cdot 2) + 1 \cdot 2 + 1 \\ 13_{16} &= 1 \cdot 16 + 3 \end{aligned}$$

Kuusitoistajärjestelmässä tarvitaan vielä kuusi uutta numeromerkkiä. Tavaksi on vakiintunut käyttää kirjainmerkkejä A, B, C, D, E ja F. Ne vastaavat lukuja 10, 11, 12, 13, 14 ja 15. Yleisesti n-järjestelmässä käytetään n:ää kappaletta eri merkkejä, jotka merkitsevät lukuja nollasta lukuun $n - 1$.

Esimerkki 6. $F4B_{16} = F \cdot (16 \cdot 16) + 4 \cdot 16 + B = 15 \cdot (16 \cdot 16) + 4 \cdot 16 + 12 = 3916_{10}$

1.1 Kirjaimet symboleina luvuille

"Jos tämä on kerran matematiikkaa, niin miksi käytätte kirjaimia?" kysyy peruskoulun alaluokkien oppilas. Lyhyt vastaus on, että näin saamme yleistettyä monia tuloksia, eikä meidän tarvitse tutkia vain erikoistapauksia.

Numeroita kuvaavat merkit ovat mielivaltaisia symboleita. Lukujakin edustamaan päädytään joskus käyttämään jotakin lyhennysmerkintää, yleensä yksittäisiä latinalaisten aakkosten kirjaimia. Kenties yleisin mielivaltaista, tuntematonta lukua edustava symboli on kirjain x. Kulmien suuruuksia merkitään yleensä kreikkalaisilla kirjaimilla kuten α (alfa), β (beeta) ja γ (gamma).

Jos kaksi lukua x ja 2 ovat yhtä suuret, merkitään $x = 2$. Tällainen yhtäsuuruus pätee aivan hyvin myös toisin päin: $2 = x$, joten kumpikin kirjoitustapa on tilanteesta riippumatta oikein. Jos luku y on pienempi kuin z merkitään $y < z$, tai toisaalta $z > y$.

Painotekstissä kirjaimella merkityt tuntemattomat ja muuttujat kirjoitetaan *kursiivilla* ja aina saman arvon saavat, tunnetut matemaattiset vakiot kuten π pystyyn.

Erilaisilla luvuilla voidaan suorittaa erilaisia laskutoimituksia. Seuraavissa luvuissa esitellään ja käydään läpi lukiomatematiikassa ja mahdollisissa jatkoopinnoissa käytettäviä lukujoukkoja ja tavallisimmat laskutoimitukset.

Luku 2 Kokonaisluvut

Yksinkertaisimmat käyttämämme luvut ovat lukumäärien ilmaisemiseen käytetyt $0, 1, 2, 3, \ldots$. Näitä kutsutaan *luonnollisiksi luvuiksi*, ja niiden joukkoa eli kaikkia luonnollisia lukuja yhdessä merkitään symbolilla $\mathbb{N}$. Nolla määritellään tässä luonnolliseksi luvuksi, mutta tästä ei ole yhteistä sopimusta: eräät pitävät nollaa luonnollisena lukuna ja toiset eivät.

Luonnollisille luvuille m ja n on määritelty yhteenlasku $m + n$, esimerkiksi $5 + 3 = 8$.

Luonnollisten lukujen m ja n kertolasku määritellään peräkkäisinä yhteenlaskuina

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ kpl}} = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ kpl}}.$$

Nollalla kertomisen ajatellaan olevan "tyhjä yhteenlasku" eli nolla:

$$0 \cdot m = 0$$

Luonnollisten lukujen m ja n erotus määritellään yhteenlaskun avulla: $m - n$ on luku k, jolle $k + n = m$. Kahden luonnollisen luvun erotus ei kuitenkaan aina ole luonnollinen luku, esimerkkinä $3 - 5$. Ratkaisemme ongelman määrittelemällä kullekin luonnolliselle luvulle vastaluvun.

Jokaisella luvulla n on vastaluku $-n$, jolle pätee $n + (-n) = 0$.

Luonnolliset luvut ja niiden vastaluvut muodostavat yhdessä kokonaislukujen joukon

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Kun käytämme kokonaislukuja, voidaan kahden luvun erotus määritellä yhteenlaskun ja vastaluvun avulla yksinkertaisesti:

$$m - n = m + (-n)$$

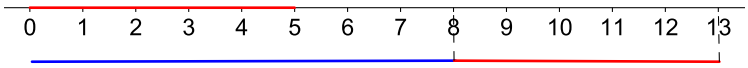
Esimerkiksi luvun 2 vastalukua merkitään -2, ja sille pätee $2 + (-2) = 0$. Vastaavasti luvun -2 vastaluku on sellainen luku, joka laskettuna yhteen luvun -2 kanssa antaa luvun 0. Tämä on tietysti 2, koska $-2+2 = 0$. Näin voidaan huomata, että $-(-2) = 2$.

2.1 Yhteen- ja vähennyslasku

Kysymys: Mitä saadaan, kun luvusta 5 vähennetään luku -8?

Negatiivisten ja positiivisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskut voidaan helposti tulkita lukusuoran avulla.

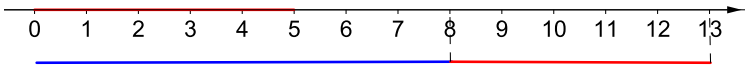
$5 + 8$ "viiteen lisätään kahdeksan"



$$5 + 8 = 13$$

$5 + (+8)$ "viiteen lisätään plus kahdeksan"

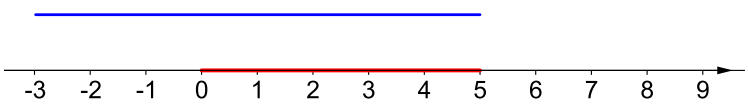
$+8$ tarkoittaa samaa kuin 8. '+'-merkkiä käytetään luvun edessä silloin, kun halutaan korostaa, että kyseessä on nimenomaan positiivinen luku.



$$5 + (+8) = 13$$

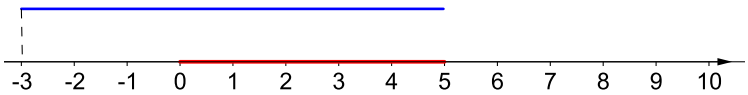
$5 - (+8)$ "viidestä vähennetään +8"

Tämä tarkoittaa samaa kuin 5-8. Lukusuoralla siis liikutaan 8 pykälää taaksepäin.



$$5 - (+8) = -3$$

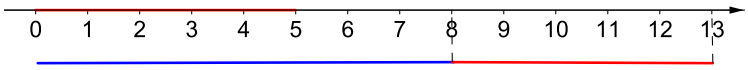
Mitä tapahtuu, kun lisätään negatiivinen luku? Kun lukuun lisätään 1, se kasvaa yhdellä. Kun lukuun lisätään 0, se ei kasva lainkaan. Kun lukuun lisätään negatiivinen luku, esim. -1, on luonnollista ajatella, että se pienenee. Tällä logiikalla negatiivisen luvun lisäämisen pitäisi siis pienentää alkuperäistä lukua. Siksi on sovittu, että $5 + (-8)$ on yhtä suuri kuin $5 - 8$.



$$5 + (-8) = -3$$

$5 - (-8)$ "viidestä vähennetään miinus kahdeksan"

Negatiivisen luvun lisääminen on vastakohta positiivisen luvun lisäämiselle. Tällöin on luonnollista, että negatiivisen luvun vähentäminen on vastakohta positiivisen luvun vähentämiselle. Koska positiivisen luvun vähentäminen pienentää lukua, pitäisi negatiivisen luvun vähentämisen kasvattaa lukua. Tämän vuoksi on sovittu, että $5 - (-8)$ tarkoittaa samaa kuin $5 + 8$.



$$5 - (-8) = 13$$

Yhteen- ja vähennyslaskun merkkisäännöt

- $a + (-b) = a - b = a - (+b)$
- $-(-a) = a$
- $a - (-b) = a + b = a + (+b)$

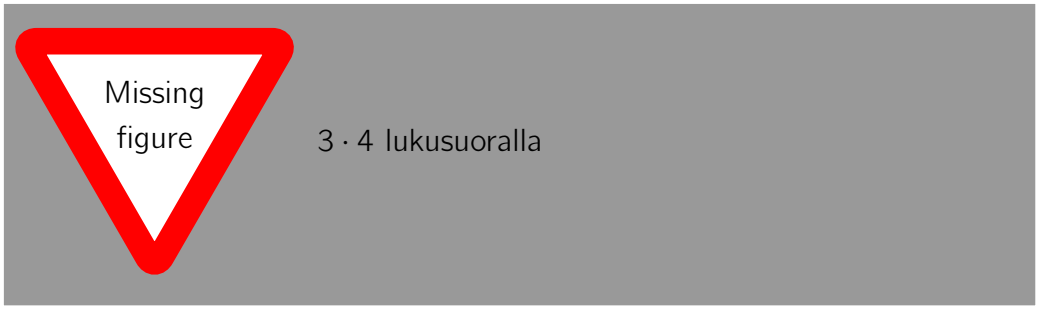
Yhteen- ja vähennyslasku kumoavat toisensa

- $a + b - b = a$
- $a - b + b = a$

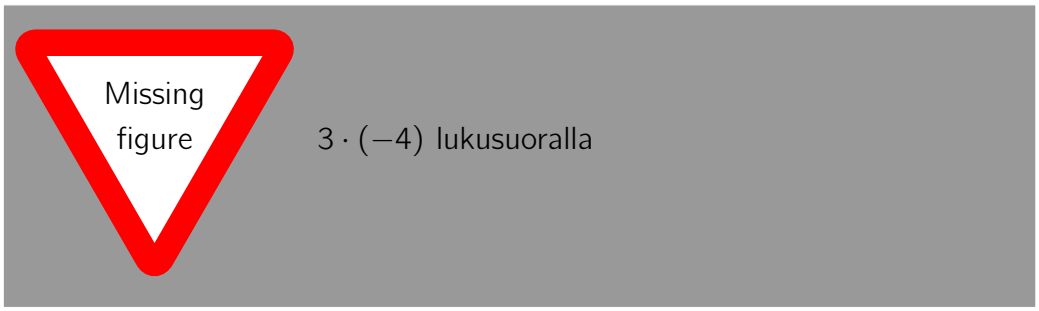
2.2 Kertolasku

Samaan logiikkaan perustuen on sovittu myös merkkisäännöt positiivisten ja negatiivisten lukujen kertolaskuissa. Kun negatiivinen ja positiivinen luku kerrotaan keskenään, saadaan negatiivinen luku, mutta kun kaksi negatiivista lukua kerrotaan keskenään, saadaan positiivinen luku.

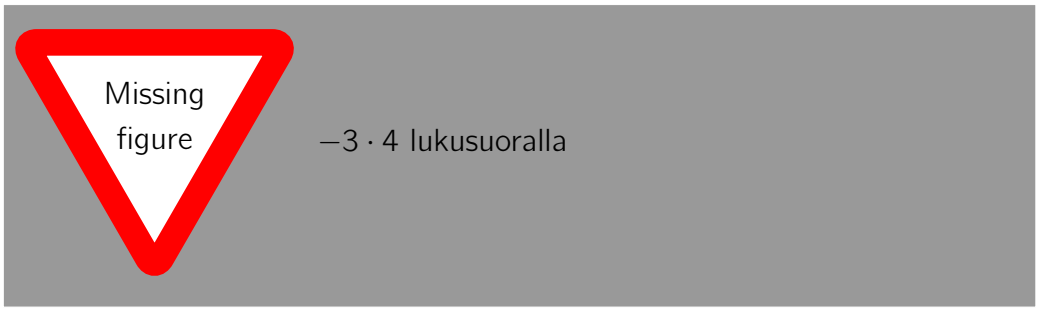
$3 \cdot 4$ "kolme kappaletta nelosia"



$3 \cdot (-4)$ "kolme kappaletta miinus-nelosia"

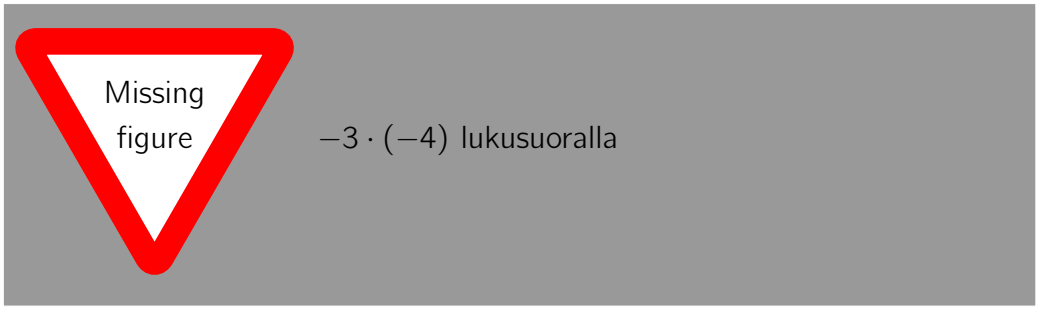


$-3 \cdot 4$ "miinus-kolme nelinkertaistetaan"



$-3 \cdot 4$ lukusuoralla

$-3 \cdot (-4)$ "miinus-kolme miinus-nelinkertaistetaan"



$-3 \cdot (-4)$ lukusuoralla

2.3 Jakolasku

Kun ensin kerrotaan jollain ja sitten jaetaan samalla luvulla, päädytään takaisin samaan, mistä lähdettiin. Jakolaskujen merkkisäännöt on sovittu niin, että tämä ominaisuus säilyy. Ne ovat siis samat kuin kertolaskujen merkkisäännöt.

Esimerkiksi haluamme, että $(-12) : (-3) \cdot (-3) = -12$. Nyt voimme kysyä, mitä laskun $(-12) : (-3)$ tulokseksi pitäisi tulla, jotta jakolasku ja kertolasku säilyvät toisilleen käänteisinä, eli mikä luku kerrottuna -3:lla on -12. Kertolaskun merkkisäännöistä nähdään helposti, että tämän luvun täytyy olla $+4$ eli 4. Niinpä on sovittu, että $(-12) : (-3) = 12 : 3 = 4$.

Kerto- ja jakolaskun merkkisäännöt

- $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
- $(-a) : b = a : (-b) = -\frac{a}{b}$
- $(-a) : (-b) = a : b = \frac{a}{b}$

Kerto- ja jakolasku kumoavat toisensa

- $a \cdot b : b = a$
- $a : b \cdot b = a$

2.4 Jaollisuus ja tekijöihinjako

Kokonaisluku a on jaollinen kokonaisluvulla b, jos on olemassa kokonaisluku c niin, että $a = b \cdot c$. Tällöin sanotaan myös, että b on a:n tekijä.

Esimerkki 7. a) Luku -12 on jaollinen luvulla 3:lla, sillä $-12 = 3 \cdot (-4)$.

b) -12 ei ole jaollinen 5:llä, sillä ei ole kokonaislukua, joka kerrottuna viidellä olisi 12.

Kuva, jossa on suorakaide, joka on jaettu 3x4 osaan.

Yllä jaollisuus määritellään kertolaskun avulla. Jaollisuuden voi määritellä myös

jakolaskun avulla niin, että a on jaollinen b:llä, mikäli $a : b$ on kokonaisluku. Esimerkiksi 12 on jaollinen 3:lla, koska $12 : 3 = 4$, joka on kokonaisluku.

Kaikki luvut ovat jaollisia itsellään ja luvulla 1. Esimerkiksi $7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7$, joten 7 on jaollinen 1:llä ja 7:llä.

Alkuluku on ykköstä suurempi luku, joka on jaollinen ainoastaan luvulla 1 ja itsellään.

Esimerkiksi luvut 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ja 19 ovat alkulukuja.

Kokonaisluvun n tekijöitä, jotka ovat alkulukuja, kutsutaan alkutekijöiksi.

Aritmetiikan peruslause

Jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukujen tulona.

Aritmetiikan peruslause todistetaan kurssilla Logiikka ja lukuteoria.

Esimerkiksi luku 84 voidaan kirjoittaa muodossa $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Kokeilemalla havaitaan, että 2, 3, ja 7 ovat kaikki alkulukuja. Aritmetiikan peruslauseen nojalla tiedetään, että tämä on ainoa tapa kirjoittaa 84 alkulukujen tulona – mahdollista kerrottavien termien järjestyksen vaihtoa lukuunottamatta.

2.5 Lausekkeiden sieventäminen

Matemaattisia ongelmia ratkaistaessa kannattaa usein etsiä vaihtoehtoisia tapoja jonkin laskutoimituksen, lausekkeen tai luvun ilmaisemiseksi. Tällöin usein korvataan esimerkiksi jokin laskutoimitus toisella laskutoimituksella, josta tulee sama tulos. Näin lauseke saadaan sellaiseen muotoon, jonka avulla ratkaisussa päästään eteenpäin.

Matematiikassa on tapana ajatella niin, että saman luvun voi kirjoittaa monella eri tavalla. Esimerkiksi merkinnät 42, $-(-42)$, $6 \cdot 7$ ja $(50 - 29) \cdot 2$ tarkoittavat

kaikki samaa lukua. Niinpä missä tahansa lausekkeessa voi luvun 42 paikalle kirjoittaa merkinnän $(50 - 29) \cdot 2$, sillä ne tarkoittavat samaa lukua. Tähän lukuun on koottu sääntöjä, joiden avulla laskutoimituksia voi vaihtaa niin, että lopputulos ei muutu.

Yhteenlaskut voi laskea missä järjestyksessä tahansa

$a + b = b + a$ (vaihdantalaki)

$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ (liitäntälaki)

Esimerkiksi laskemalla voidaan tarkistaa, että $5+7 = 7+5$ ja että $(2+3)+5 = 2 + (3 + 5)$.

Nämä säännöt voidaan yhdistää yleiseksi säännöksi, jonka mukaan yhteenlaskun sisällä laskujärjestystä voi vaihtaa miten tahansa.

Tämä sääntö voidaan yleistää koskemaan myös vähennyslaskua, kun muistetaan, että vähennyslasku tarkoittaa oikeastaan vastaluvun lisäämistä. $5 - 8$ tarkoittaa siis samaa kuin $5 + (-8)$, joka voidaan nyt kirjoittaa yhteenlaskun vaihdantalain perusteella muotoon $(-8) + 5$ eli $-8 + 5$ ilman, että laskun lopputulos muuttuu. Tästä seuraa seuraava sääntö:

Pelkästään yhteen- ja vähennyslaskua sisältävässä lausekkeessa laskujärjestystä voi vaihtaa vapaasti, kun ajattelee miinusmerkin kuuluvan sitä seuraavaan lukuun ja liikkuvan sen mukana.

Esim. $5-8+7-2 = 5+(-8)+7+(-2) = (-2)+(-8)+5+7 = -2-8+5+7$

Vastaavat säännöt pätevät kerto- ja jakolaskulle samoista syistä.

Kertolaskut voi laskea missä järjestyksessä tahansa

$a \cdot b = b \cdot a$ (vaihdantalaki)

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ (liitäntälaki)

Esim. $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$

Pelkästään kerto- ja jakolaskua sisältävässä lausekkeessa laskujärjestystä voi vaihtaa vapaasti, kun ajattelee jakolaskun käänteisluvulla kertomisena.

Esim. $5 : 8 \cdot 7 : 2 = 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 5 = 7 : 2 : 8 \cdot 5$

Lisäksi yhteen- ja kertolaskua sisältävällä lausekkeelle pätee seuraava erittäin tärkeä sääntö:

$a(b + c) = ab + ac$ (osittelulaki)

Vasemmalta oikealle luettaessa puhutaan sulkujen avaamisesta. Oikealta vasemmalle päin mentäessä puhutaan *yhteisen tekijän ottamisesta*.

Aikaisemmin mainittujen laskulakien perusteella osittelulaki voidaan yhdistää koskemaan myös toisin päin olevaa kertolaskun ja yhteenlaskun yhdistelmää, useamman luvun yhteenlaskua, vähennyslaskua ja jakolaskua:

- $(b+c)a = a(b+c) = ab+ac = ba+ca$ (Sovellettu vaihdantalakia)
- $a(b + c + d) = a((b + c) + d) = a(b + c) + ad = ab + ac + ad$ (Sovellettu liitäntälakia)
- $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a \cdot (-c) = ab - ac$ (Sovellettu vähennyslakun määritelmää vastaluvun avulla)
- $(b + c) : a = (b + c) \cdot \dfrac{1}{a} = b \cdot \dfrac{1}{a} + c \cdot \dfrac{1}{a} = b : a + c : a$ (Sovellettu jakolaskun ilmaisemista käänteisluvun avulla. Tämä ominaisuus esitellään myöhemmin rationaalilukujen yhteydessä.)

Esimerkiksi seuraava laskutoimitus on helppo laske osittelulain avulla: $2574 \cdot 542 - 2574 \cdot 541 = 2574 \cdot (542 - 541) = 2574 \cdot 1 = 2574$

Osittelulakia voidaan käyttää myös tuntemattomia lukuja sisältävien lausekkeiden muokkaamisessa. Esim. $2(x + 5) = 2x + 10$.

Tehtäviä

1. Kirjoita laskutoimitukseksi. (Laskuun ei tarvitse merkitä yksikköjä, eli celciusasteita tai euroja.)

a) Pakkasta on aluksi $-10°$C, ja sitten se lisääntyy kahdella pakkasasteella.
b) Pakkasta on aluksi $-20°$C, ja sitten se hellittää (vähentyy) kolme (pakkas)astetta.
c) Lämpötila on aluksi $17°$C, ja sitten se vähentyy viisi astetta.
d) Lämpötila on aluksi $5°$C, ja sitten se kasvaa kuusi astetta.
e) Mies on mafialle 30000 euroa velkaa ja menehtyy. Hänen kolme poikaansa jakavat velan tasan keskenään. Kuinka paljon kukin on velkaa mafialle? Merkitse velkaa negatiivisella luvulla.

2. Laske.

a) $11 + (-14)$
b) $-8 - (-4)$
c) $-9 - (+7)$
d) $-(-8) + (5) - (-(-11))$
e) $-8 : (-4)$
f) $(-8) : (-4)$
g) $(-5) \cdot 12$

3. Laske.

a) $3 + 5$
b) $10 - 5 - 6 + 1$
c) $2 \cdot 2 - 1$
d) $-9 - 5 \cdot (-2) + 3$

e) $10 \cdot (5 - 2)$

f) $(2 - 5)(5 - 1) + 1$

g) $-9 - 2 \cdot (3 - 2 \cdot (3 \cdot 2 - 1))$

4. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia luvulla 4? Jos luku a on jaollinen luvulla 4, kerro, millä kokonaisluvulla b pätee $a = 4 \cdot b$.

a) 1 b) 12 c) 13 d) 2 e) -20 f) 0

5. Mitkä seuraavista luvuista ovat alkulukuja? Jos luku ei ole alkuluku, esitä se joidenkin kahden kokonaisluvun (jotka eivät ole ykkönen ja luku itse) tulona.

a) 6 b) 11 c) 29 d) -27 e) -11 f) 0

6. Jaa seuraavat luvut alkutekijöihin.

a) 12 b) 15 c) 28 d) 30 e) 64 f) 90 g) 100

Luku 3 Rationaaliluvut

Rationaaliluvulla tarkoitetaan lukua q, joka voidaan esittää muodossa

$$q = \frac{a}{b},$$

missä a ja b ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$. Rationaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{Q}$. Rationaaliluvun esitystä osamääränä $\frac{a}{b}$ kutsutaan *murtoluvuksi*. Luku a on murtoluvun *osoittaja* ja luku b on *nimittäjä*. Kaikki rationaaliluvut voidaan esittää murtolukuina, mutta murtoluvut eivät ole ainoa tapa rationaalilukujen esittämiseksi. Kaikki rationaaliluvut voidaan myös esittää usealla eri tavalla murtolukuna.

Murtoluku on osamäärä

$$\frac{a}{b}$$

missä $a,b \in \mathbb{Z}$ ja $b \neq 0$. Jokaisen murtoluvun arvo on rationaaliluku ja jokainen rationaaliluku voidaan esittää murtolukuna.

3.1 Murtolukujen laskusäännöt

Esimerkki 8. Murtolukujen yhteenlasku. Laske

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}.$$

Ratkaisu. Lavennetaan nimittäjät samannimisiksi ja lasketaan osoittajat yhteen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6} &= \frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\\ &= \frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\\ &= \frac{3+1+2}{6}\\ &= \frac{6}{6}=1.\end{aligned}$$

Jos murtolukujen nimittäjät ovat samat, voidaan murtoluvut laskea yhteen laskemalla osoittajat yhteen.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Murtolukuja, joiden nimittäjät ovat samat, sanotaan *samannimisiksi*. Jos yhteenlaskettavien murtolukujen nimittäjät eivät ole samat, murtoluvut *lavennetaan* ensin samannimisiksi ja sitten osoittajat lasketaan yhteen. Jos siis $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ovat murtolukuja, lasketaan

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Tässä $\frac{a}{b}$ lavennetaan d:llä ja $\frac{c}{d}$ lavennetaan b:llä, jolloin saadaan kaksi samannimistä murtolukua, joiden kummankin nimittäjä on yhteenlaskettavien nimittäjien tulo bd.

Esimerkki 9. Murtolukujen kertolaskussa osoittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$$

Murtolukujen $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ tulo lasketaan kertomalla lukujen osoittajat ja nimittäjät keskenään:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{cd}$$

tähän Sampon paperille suunnittelema havainnollistus kertolaskusäännöstä

Esimerkki 10. Luvun 5 *käänteisluku* on $\frac{1}{5}$, koska

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

Vastaavasti luvun $-\frac{2}{3}$ käänteisluku on $-\frac{3}{2}$, koska

$$-\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = 1.$$

Rationaaliluvun a ($a \neq 0$) *käänteisluvuku* on $\frac{1}{a}$, sillä

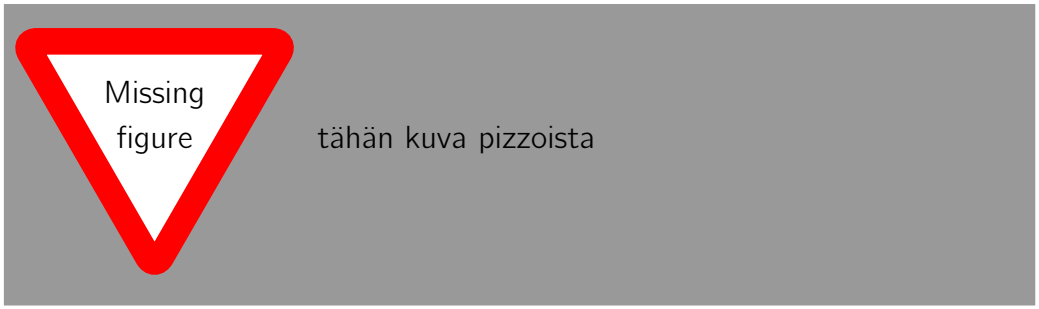
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Vastaavasti rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ ja $b \neq 0$) käänteisluku on $\frac{b}{a}$, sillä

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Kahta murtolukua vertailtaessa ne kannattaa ensin laventaa samannimisiksi.

Esimerkki 11. Salamipizza jaetaan kuuteen ja tonnikalapizza neljään yhtä suureen siivuun. Vesa saa kaksi siivua salamipizzaa ja yhden siivun tonnikalapizzaa. Minttu saa kaksi siivua tonnikalapizzaa. Kumpi saa enemmän pizzaa, jos molemmat pizzat ovat saman kokoisia?



Ratkaisu.

Huomataan, että $12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$. Luvut kannattaa pizzan kokonaismäärän laskemista varten laventaa niin, että nimittäjänä on luku 12. Vesan saama määrä pizzaa on

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Mintun saama määrä pizzaa on

$$\frac{2}{4} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}.$$

Koska $6/12 < 7/12$, Vesa saa enemmän.

Kaikki rationaaliluvut voidaan esittää murtolukumuodossa, mutta myös kokonaisluvut voidaan esittää murtolukuina asettamalla murtoluvun nimittäjäksi yksi. Tätä voidaan käyttää, kun lasketaan yhteen kokonaislukuja ja murtolukuja.

Esimerkki 12. Laske

$$2 + \frac{1}{3}.$$

Ratkaisu.

Kirjoitetaan lausekkeen kokonaisluku 2 murtolukuna, jonka jälkeen voidaan murtoluvut voidaan laventaa samannimisiksi ja laskea yhteen:

$$2+\frac{1}{3}=\frac{2}{1}+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 1}+\frac{1}{3}=\frac{6+1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Rationaalilukujen ja murtolukujen erona on, että rationaaliluvut ovat lukujen muodostama joukko, kun taas murtoluvut ovat lukujen esitystapa. Vaihtoehtoinen esitystapa rationaaliluvuille on *desimaaliluvut*, esimerkiksi murtoluku $\frac{1}{2}$ ja desimaaliluku 0,5 esittävät samaa rationaalilukua.

Tehtäviä

Laskujärjestys:
1. Sulut
2. Potenssilaskut
3. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. Yhteen- ja jakolaskut vasemmalta oikealle

Opi perusteet

7. a) $\frac{3}{11}+\frac{5}{11}$ b) $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{11}{12}-\frac{5}{6}$

8. a) $1\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}$ c) $2+\frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{2}-\frac{5}{6}$

9. a) $\frac{5}{8}\cdot(\frac{3}{5}+\frac{2}{5})$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}$

10. a) $\frac{2}{3}:\frac{7}{11}$ b) $\frac{4}{3}:(\frac{-13}{4})$ c) $\frac{7}{8}:4$

11. Laske murtolukujen $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{2}{15}$

a) summa b) erotus c) tulo d) osamäärä.

Hallitse kokonaisuus

12. a) $\dfrac{\frac{1}{2}:\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{12}}$.

13. Laske lausekkeen $\frac{x}{2-3x}$ arvo, kun x on

a) 4 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{7}{10}$.

14. Laske lausekkeen $\frac{x+y}{2x-y}$ arvo, kun

a) $x=\frac{1}{2}$ ja $y=\frac{1}{4}$ b) $x=\frac{1}{4}$ ja $y=-\frac{3}{8}$.

15. Laatikossa on palloja, joista kolmasosa on mustia, neljäsosa valkoisia ja viidesosa harmaita. Loput palloista ovat värikkäitä. Kuinka suuri osuus palloista on värikkäitä?

Sekalaisia tehtäviä

16. Fibonaccin luvut 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... määritellään seuraavasti: Kaksi ensimmäistä Fibonaccin lukua ovat 0 ja 1, ja siitä seuraavat saadaan kahden edellisen summana:

$$0+1=1, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3, \quad 2+3=5, \quad \text{ja niin edelleen.}$$

Tutki, miten Fibonaccin luvut liittyvät lukuihin

$$\frac{1}{1+1}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}, \quad \ldots$$

Yksi prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa: $1\ \% = \frac{1}{100}$

17. Pontus, Viljami, Jarkko-Kaaleppi, Simo ja Milla leipoivat lanttuvompattipiirakkaa. Pontus kuitenkin söi piirakasta kolmanneksen ennen muita, ja loput piirakasta jaettiin muiden kanssa tasan. Kuinka suuren osan muut saivat?

18. Huvipuiston sisäänpääsylippu maksaa 20 euroa, ja lapset pääsevät sisään puoleen hintaan.

a) Kuinka paljon kolmen lapsen yksinhuoltajaperheelle maksaa päästä sisään?

b) Kuinka paljon sisäänpääsy maksaa perheelle avajaispäivänä, kun silloin sisään pääsee 25 % halvemmalla.

19. Laske $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

20. Eräässä kaupassa on käynnissä loppuunmyynti ja kaikki tuotteet myydään puoleen hintaan. Lisäksi kanta-asiakkaat saavat aina viidenneksen alennusta tuotteiden senhetkisestä hinnasta. Paljonko kanta-asiakas maksaa nyt tuotteesta joka normaalisti maksaisi 40 euroa?

21. Kokonaisesta kakusta syödään maanantaina iltapäivällä puolet, ja jäljelle jääneestä palasta syödään tiistaina iltapäivällä taas puolet. Jos kakun jakamista ja syömistä jatketaan samalla tavalla koko viikko, niin kuinka suuri osa alkuperäisestä kakusta on jäljellä seuraavana maanantaiaamuna?

22. Ratkaise lausekkeen $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ arvo, kun tiedetään, että $n = \frac{1}{6}$ ja $m = n + 1$.

Luku 4 Potenssi

Jos a on reaaliluku ja n on positiivinen kokonaisluku, potenssilla a^n tarkoitetaan tuloa

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}}.$$

Lukua a kutsutaan potenssin *kantaluvuksi* ja lukua n *eksponentiksi*. Merkinnällä 2^4 siis tarkoitetaan tuloa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Siten

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Luvun toista potenssia a^2 kutsutaan myös luvun a *neliöksi* ja kolmatta potenssia a^3 sen *kuutioksi*. Luvun $a > 0$ neliö on sellaisen neliön pinta-ala, jonka sivun pituus on a. Vastaavasti, jos kuution särmän pituus on a, niin a^3 on kyseisen kuution tilavuus.

Esimerkki 13. Potenssien sieventäminen.

a) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

c) $-2^4 = -(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

d) $2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \text{ kpl}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ kpl}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ kpl}} = 2^5 = 32$

e) $\dfrac{2^4 \cdot 2^2}{2^3} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^3 = 8$

Potenssien laskusäännöt

Samankantaisten potenssien kertolasku

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\text{ kpl}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4\text{kpl}} = a^{3+4} = a^7$$

Samankantaisten potenssien jakolasku

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{7-4} = a^3$$

Potenssin potenssi

$$(a^2)^3 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{3\text{ kpl}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{2\cdot 3=6\text{ kpl}} = a^{2\cdot 3} = a^6$$

Tulon potenssi

$$(ab^5)^3 = ab^5 \cdot ab^5 \cdot ab^5 = a \cdot a \cdot a \cdot b^5 \cdot b^5 \cdot b^5 = a^{1\cdot 3} \cdot b^{5\cdot 3} = a^3 b^{15}$$

Osamäärän potenssi

$$\left(\frac{a^9}{b^7}\right)^3 = \frac{a^9}{b^7} \cdot \frac{a^9}{b^7} \cdot \frac{a^9}{b^7} = \frac{a^9 \cdot a^9 \cdot a^9}{b^7 \cdot b^7 \cdot b^7} = \frac{a^{9\cdot 3}}{b^{7\cdot 3}} = \frac{a^{27}}{a^{21}}$$

Potensseille pätevät seuraavat laskusäännöt.

Potenssien laskusääntöjä

Olkoot m ja n kokonaislukuja ja a reaaliluku.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Samakantaisten potenssien tulo
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Samakantaisten potenssien osamäärä ($a \neq 0$)
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Tulon potenssi
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	Osamäärän potenssi ($b \neq 0$)
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Potenssin potenssi

Negatiivinen luku ja nolla eksponenttina

Sievennetään osamäärä $\frac{a^3}{a^5}$ kahdella eri tavalla. Supistamalla yhteiset tekijät lopputulos

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{\boldsymbol{a}^2}$$

on erinäköinen, kuin käyttämällä potenssien laskusääntöjä

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = \boldsymbol{a}^{-2}.$$

Koska lähtötilanne on molemmissa tapauksissa sama, voidaan määritellä, että

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Negatiivinen eksponentti (kun $a \neq 0$)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Kun eksponenttina on nolla, on tuloksena aina luku 1 kaikilla nollasta poikkeavilla kantaluvuilla. Esimerkiksi

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1,$$

mutta sama lasku voidaan laskea myös toisella tavalla: $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$.

Eksponenttina nolla (kun $a \neq 0$)

$$a^0 = 1$$

Merkintää 0^0 ei ole määritelty.

Huomautus laskujärjestyksestä

Mikäli potensseja on monta päällekkäin (eli eksponenttina on potenssilauseke), laskeminen aloitetetaan ylimmästä potenssista. Esimerkiksi

$$2^{3^2} = 2^9 = 512.$$

Laskujärjestystä voidaan muuttaa suluilla:

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64.$$

Tehtäviä

Opi perusteet

23. Laske. a) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$ b) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

24. Sievennä. a) $a\cdot a\cdot a$ b) $a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$ c) $a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a$

25. Laske. a) $2^3\cdot 2^3$ b) 4^3 c) $(2^2)^3$ d) 2^{2+2+2}

26. Sievennä. a) $a^3\cdot a^2\cdot a^5$ b) $(a^3)^2$ c) $(a^2a^3)^4$ d) a^{7-2}

27. Laske. a) $\dfrac{2^3}{2^2}$ b) $\dfrac{2^4}{2^2}$ c) $\dfrac{2^3}{2^1}$ d) $\dfrac{2^3}{2^0}$ e) $\dfrac{2^3}{2^4}$ f) $\dfrac{2^3}{2^5}$

Hallitse kokonaisuus

Sievennä.

28. a) $(1\cdot a)^3$ b) $(a\cdot 2)^2$ c) $(-2abc)^3$ d) $(3a)^4$

29. a) $a^3\cdot b^2\cdot a^5$ b) $(-ab^3)^2$ c) $(a^5a^4)^3$ d) 10^{2^3}

30. a) $(-a)\cdot(-a)$ b) $(-a)\cdot(-a)\cdot(-b)^3$ c) $(-a^2)\cdot(-a)^2$

31. a) $b^3(ab^0)^2$ b) $(ab^3)^0$ c) $(aa^4)^3a^2$ d) $a^3(b^2a)^5$

32. a) $(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})$ b) $(-\frac{ab^2}{a^2b})^3$ c) $(-a^4b^4)^2$ d) $\left((\frac{a}{b})^4\right)^2$

33. a) $\frac{6a^9}{3a^2}$ b) $(\frac{a^2b^{-2}}{a^2b})^{-3}$ c) $\frac{5a^2}{-15a}$ d) $\left(-(\frac{10^3}{100b})^2b^{-1}\right)^2$

34. [$\star$] Tetraatio on lyhennysmerkintä "potenssitornille", jossa esiintyy vain yhtä lukua. Se määritellään seuraavasti.

$$^{n}a = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n\text{ kpl}}.$$

Laske a) $^{4}2$ b) $^{3}5$. c) Ratkaise yhtälö $^{x}2 = 16$.

Sekalaisia tehtäviä

Sievennä.

35. a) $a^2\cdot a^3$ b) a^3a^2 c) a^2a d) aa^2a e) $a^2a^1a^3$

36. a) a^0 b) a^0a^0 c) aa^1 d) aa^0 e) a^0a^1

37. a) a^1aa^2 b) $aaaa$ c) a^3ba^2 d) aba^0ba^1

38. a) $-a \cdot (-a)$ b) $-a \cdot (-a) \cdot (-b)$ c) $-a^2 \cdot (-a^2)$

39. a) $-a^3 \cdot (-a^2)$ b) $a \cdot (-a) \cdot (-b)$ c) $a^2 \cdot (-a^2)$

40. a) $0^3 \cdot 0^3 \cdot 0^3$ b) 3^1 c) 2^{2+3} d) 2^{6-4} e) 5^0

41. a) $(a^3)^1$ b) $(a^6)^2$ c) $(a^2)^4$ d) $(a^1)^3$ e) $(a^0)^5$

42. a) $(1^3 \cdot 2^2)^2$ b) $(1^2 \cdot 2^3)^2$ c) $(2^2a^4)^2$ d) $b(3b)^3$

43. a) $(a^3b^2)^2$ b) $a(a^2b^3)^4$ c) $(b^2a^4)^5$ d) $b(2ab^2)^3$

44. a) $\frac{a^3}{a^2}$ b) $\frac{a^4}{a^2}$ c) $\frac{a^3}{a^1}$ d) $\frac{a^3}{a^0}$ e) $\frac{a^3}{a^4}$ f) $\frac{a^3}{a^5}$

45. a) $\frac{a^2b^2}{ab}$ b) $\frac{a^2b}{a^2}$ c) $\frac{a^3}{a^3}$ d) $\frac{1}{a^0}$ e) $\frac{ab^3}{-b^4}$

46. Sievennä ja kirjoita potenssiksi, jonka eksponentti on positiivinen.
a) a^{-3} b) $\frac{a}{a^3}$ c) $a^{-2} \cdot a^5$ d) $\frac{b}{a^4}b^{-4}$ e) $\frac{a^3}{a^{-5}}$

47. Esitä ilman sulkuja ja sievennä.
a) $(\frac{1}{2})^2$ b) $(\frac{1}{3})^3$ c) $(\frac{a}{b})^4$ d) $(\frac{a^2}{b^3})^2$ e) $\left(\frac{a^2}{ab^2}\right)^2$

Sievennä.

48. a) 2^3
b) $aaaa$
c) a^3a^2
d) 0^4

49. a) a^2a^5
b) $\frac{a^5}{a^3}$
c) $(a^3)^2$
d) 12^0

50. a) $a^2(-a^4)$
b) $(ab^2)^0$
c) $(3a)^3$
d) $(a^5b^3)^3$

51. a) $\frac{2^7}{2^9}$
b) $\frac{a^3}{a}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

d) $\left(\frac{a^{-2}}{ab^4}\right)^4$

Luku 5 Desimaaliluvut

Desimaaliluvut on *kymmenjärjestelmään* perustava tapa merkitä rationaalilukuja. Niillä voi merkitä myös irrationaalilukujen *likiarvoja*.

123,456 on esimerkki desimaaliluvusta.

- 123 on sen *kokonaisosa*.
- Kokonaisluku erotetaan loppuosasta *desimaalierottimella*, joka on suomen kielessä pilkku (,). [1]
- Osaa 456 kutsutaan desimaaliluvun *loppuosaksi*.

Esimerkkinä annettu desimaaliluku tulkitaan seuraavasti:

$$123{,}456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} \quad (5.1)$$

Tähän kuva siitä, kuinka desimaaliluvun numerot vastaavat kymmenen potensseja

1. Useissa englanninkielisissä maissa käytetään desimaalierottimena pistettä (.) ja pilkku on tuhaterotin. Esimerkiksi yhdysvaltalaisessa kirjassa merkintä $ 1,000.50 tarkoittaa tuhatta dollaria ja 50 senttiä. Suomen kielessä tuhaterotin on välilyönti.

Kymmenjärjestelmä saa nimensä siitä, että jokainen luvussa esiintyvä numero kertoo sen paikkaa vastaavien kymmenen potenssien määrän.

Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi

Murtoluku on tapa merkitä jakolaskua. Jakolaskun tuloksen esittämiseksi desimaalilukuna käytetään peruskoulun alaluokilla opetettavaa jakokulmaa. Jakokulman ajatus on yksinkertaisesti kokeilla, kuinka monta jakajaa, sen kymmenesosaa, sadasosaa ja niin edelleen jaettavaan mahtuu. Jakokulmat voi laskea käsin, mutta laskin tekee saman nopeammin.

Esimerkki 14. Muutetaan $\frac{21}{4}$ desimaaliluvuksi laskemalla jakolasku 21 : 4 jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & _ & \underline{5}, & \underline{2} & \underline{5} \\
4 & |2 & 1, & 0 & 0 \\
\underline{-} & \underline{2} & \underline{0} & & \\
 & & 1 & 0 & \\
 & \underline{-} & _ & \underline{8} & \\
 & & & 2 & 0 \\
 & & \underline{-} & \underline{2} & \underline{0} \\
 & & & & 0
\end{array}
$$

Siis $\dfrac{21}{4} = 5{,}25$.

Vastaavasti laskien saadaan $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & \underline{0}, & \underline{2} & \underline{7} & \underline{2} & \underline{\ldots} \\
11 & |3, & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\underline{-} & \underline{2} & \underline{2} & & & \\
 & & 8 & 0 & & \\
 & \underline{-} & \underline{7} & \underline{7} & & \\
 & & & 3 & 0 & \\
 & & \underline{-} & \underline{2} & \underline{2} & \\
 & & & & 8 & 0 \\
 & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Koska jakojäännökset 3 ja 8 toistuvat loputtomiin, tämä desimaaliluku ei ole päättyvä. Siinä on *jakso*: numerosarja 27 toistuu. Jaksoa voidaan merkitä yläviivan avulla seuraavasti:

$$0{,}27272727\ldots = 0{,}\overline{27}.$$

Kaikkien murtolukujen desimaaliesitykset ovat joko päättyviä tai jaksollisia. Vähennyslaskuissa syntyvät jakojäännökset ovat nimittäin aina jakajaa pienempiä, ja siksi ne alkavat väistämättä toistaa itseään, ellei jako jossakin vaiheessa mene tasan. Koska eri vahtoehtoja jakojäännöksiksi on yksi jakajaa vähemmän, jakson pituus on suurimmillaan yhden verran jakajaa pienempi. Esimerkiksi luvulla $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$ jakso on pisin mahdollinen, $7 - 1 = 6$ numeron mittainen.

Tässä on joitain murtolukujen desimaaliesityksiä, jotka on hyvä osata

- $\frac{1}{10} = 0{,}1$
- $\frac{1}{100} = 0{,}01$
- $\frac{1}{2} = 0{,}5$
- $\frac{1}{4} = 0{,}25$
- $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi

Päättyvät desimaaliluvut

Päättyvät desimaaliluvut voidaan muuttaa murtoluvuiksi muuttamalla kukin desimaali erikseen murtoluvuksi ja laskemalla syntyneet luvut yhteen.

Esimerkki 15. $21{,}37 = 21 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{2100}{100} + \frac{30}{100} + \frac{7}{100} = \frac{2100+30+7}{100} = \frac{2137}{100}$.

Tämä on turhan työlästä, ja paljon helpommalla päästäänkin kun lavennetaan luku "niin monella kympillä, kuin siinä on numeroita desimaalipilkun jälkeen". Täsmällisemmin sanottuna 10^n:llä, jossa n on pilkun jälkeen tulevien numeroiden määrä.

Esimerkki 16. $21{,}47 = 21{,}37 \cdot \frac{100}{100} = \frac{21{,}37 \cdot 100}{100} = \frac{2137}{100}$

Jaksolliset desimaaliluvut

Minkä tahansa jaksollisen desimaaliluvun voi muuttaa murtoluvuksi seuraavalla tempulla. Muutetaan esimerkiksi $0{,}575757\ldots$ murtoluvuksi. Jos merkitään

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}575757\ldots, && \text{saadaan sadalla kertomalla}\\
100x &= 57{,}575757\ldots, && \text{joiden erotuksena}\\
100x - x &= 57{,}57\ldots - 0{,}57\ldots, && \text{eli}\\
99x &= 57, && \text{josta saadaan}\\
x &= \frac{57}{99} = \frac{19}{33}.
\end{aligned}$$

Siis $0{,}575757\ldots = \frac{19}{33}$. Menetelmä toimii kaikille jaksollisille desimaaliluvuille: kerrotaan vain sopivalla luvun 10 potenssilla, jotta jakso katoaa vähennyslaskussa.

Nämä kannattaa muistaa:

- $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$
- $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$

Tehtäviä

52. Laske ja totea murtolukujen $\frac{1}{10} = 0{,}1$, $\frac{1}{100} = 0{,}01$, $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{3}{4} = 0{,}75$ desimaaliesitysten paikkansapitävyys.

53. Muuta murtoluvuksi.

a) 43,532
b) 5,031
c) 0,23
d) 0,3002
e) 0,101

54. Muuta murtoluvuksi ja sievennä.

a) 0,01
b) 0,0245
c) 0,004
d) 0,001004

55. Muuta murtoluvuksi.

a) $0{,}77777\ldots$
b) $0{,}151515\ldots$
c) $2{,}05\overline{631}$

56. a)

Joissain yhteyksissä käytetään muitakin *lukujärjestelmiä* kuin kymmenjärjestelmää. Esimerkiksi tietokoneet käyttävät kaksikantajärjestelmää eli *binäärijärjestelmää*. Binäärijärjestelmässä jokainen luvun numero kertoo sen paikkaa vastaavan kakkosen potenssien määrän kymmenen potenssien sijasta.

Binäärijärjestelmässä esitetty luku merkitään yleensä kirjoittamalla pieni kakkonen luvun jälkeen, esim. $10{,}01_2$.

Esimerkki 17. $10{,}01_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 2{,}25_{10}$

Tehtäviä

57. Muunna seuraavat binääriluvut kymmenjärjestelmään.

a) $101{,}0_2$
b) $1{,}00101_2$
c) $100101{,}1101_2$

58. Muunna seuraavat luvut binäärijärjestelmään.

a) $7{,}0_{10}$
b) $2{,}5_{10}$
c) $11{,}1875_{10}$

Luku 6 Juuret

6.1 Neliöjuuri

Ajatellaan, että neliön pinta-ala on a. Halutaan tietää, mikä on kyseisen neliön sivun pituus. Vastausta tähän kysymykseen kutsutaan luvun $a \geq 0$ neliöjuureksi ja merkitään $\sqrt{a}$. Luvun a neliöjuuri on myös yhtälön $x^2 = a$ ratkaisu. Tällöin täytyy kuitenkin huomata, että myös luku $x = -\sqrt{a}$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Neliöjuurella tarkoitetaan kyseisen yhtälön epänegatiivista ratkaisua. Tämä on luonnollista, koska neliön sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku.

Luvun a neliöjuuri on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a. Tämä voidaan ilmaista myös $(\sqrt{a})^2 = a$.

Neliöjuurta ei tällä kurssilla määritellä negatiivisille luvuille, koska neliön pinta-ala on aina positiivinen luku tai nolla. Käytännössä lukujen neliöjuuria lasketaan usein laskimella.

Esimerkki 18. Laske.

a) $\sqrt{4}$
b) $\sqrt{144}$
c) $\sqrt{4471}$.

Ratkaisut.

a) Laskimella tai päässä laskemalla saadaan, että $\sqrt{4} = 2$, koska $2 \geq 0$ ja $2^2 = 4$.

b) $\sqrt{144} = 12$. Tämä voidaan vielä tarkistaa laskemalla $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$.

c) $\sqrt{4471} \approx 66{,}9$. Vertailun vuoksi laskimella saadaan myös $67 \cdot 67 = 4489$.

Vastaukset. a) 2, b) 12, c) 66,9.

Esimerkki 19. Taulutelevision kooksi (lävistäjäksi) on ilmoitettu mainoksessa 46,0 tuumaa (116,8 cm) ja kuvasuhteeksi 16:9. Kuinka leveä televisio on (senttimetreinä)?

Ratkaisu.

Taulutelevision halkaisija, alareuna ja toinen sivu muodostavat suorakulmaisen kolmion. Kolmion hypotenuusa on television halkaisija ja kateetit alareuna ja toinen sivu.

Kuvausuhteen perusteella kateettien pituuksia voidaan merkitä $16x$ ja $9x$. Pythagoraan lauseesta saadaan

$$(116{,}8)^2 = (16x)^2 + (9x)^2$$

eli

$$13642{,}24 = (256 + 81)x^2.$$

Siten

$$x^2 = \frac{13642{,}24}{337}$$

ja siis

$$x = \sqrt{\frac{13642{,}24}{337}} \approx 6{,}36.$$

Television leveys on noin $16x = 16 \cdot 6{,}36 \approx 102$ cm.

Vastaus. Noin 102 cm.

6.2 Kuutiojuuri

Kuution tilavuus on a. Halutaan tietää, mikä on kyseisen kuution sivun pituus. Vastausta tähän kysymykseen kutsutaan luvun $a \geq 0$ kuutiojuureksi ja

merkitään $\sqrt[3]{a}$. Luvun a kuutiojuuri on myös yhtälön $x^3 = a$ vastaus.

Luvun a kuutiojuuri on luku, jonka kuutio on a. Tämä voidaan ilmaista myös $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Jos $a < 0$, niin kysymys kuutiosta jonka tilavuus on a, ei ole mielekäs. Tästä huolimatta kuutiojuuri määritellään myös negatiivisille luvuille. Syy tähän on, että yhtälöllä $x^3 = a$ on tässäkin tapauksessa yksikäsitteinen ratkaisu. Positiivisen luvun kuutiojuuri on aina positiivinen ja negatiivisen luvun kuutiojuuri on aina negatiivinen luku. Kuutiojuuren voi siis ottaa mistä tahansa reaaliluvusta.

Esimerkki 20. Laske.

a) $\sqrt[3]{27}$
b) $\sqrt[3]{1397}$
c) $\sqrt[3]{2197}$.

Ratkaisut.

a) Laskimella tai päässä laskemalla saadaan, että $\sqrt[3]{27} = 3$, koska $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

b) $\sqrt[3]{1397} \approx 11{,}18$.

c) $\sqrt[3]{2197} = 13$. Tämä voidaan vielä tarkistaa laskemalla $13^3 = 13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197$.

Vastaukset.

a) 3, b) 11,18, c) 13.

6.3 Korkeammat juuret

Yhtälön $x^n = a$ ratkaisujen avulla voidaan määritellä n:s juuri mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n. Neliö- ja kuutiojuurten tapauksesta voidaan kuitenkin voi huomata, että kuutiojuuri on määritelty kaikille luvuille, mutta

neliöjuuri vain ei-negatiivisille luvuille. Tämä toistuu myös muissa juurissa: parilliset ja parittomat juuret on määriteltävä erikseen.

Juurimerkinnällä $\sqrt[n]{a}$ (luetaan *n:s juuri* luvusta a) tarkoitetaan lukua, joka toteuttaa ehdon $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Jotta juuri olisi yksikäsitteisesti määritelty asetetaan lisäksi, että parillisessa tapauksessa n:s juuri tarkoittaa kyseisen yhtälön epänegatiivista ratkaisua.

Parillinen juuri

Kun n on parillinen luku, luvun $a \geq 0$ n:s juuri on luku $b \geq 0$, jonka n:s potenssi on a, eli $b^n = a$. Lukua b merkitään $\sqrt[n]{a}$, eli $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Edelleen, kun n on parillinen luku, n:ttä juurta ei ole määritelty negatiivisille luvuille.

Luvun toista juurta, eli neliöjuurta $\sqrt[2]{a}$ merkitään yleensä yksinkertaisemmin $\sqrt{a}$.

Pariton juuri

Kun n on pariton luku, luvun $a \in \mathbb{R}$ n:s juuri on yksikäsitteinen luku $b \in \mathbb{R}$, jonka n:s potenssi on a, eli $b^n = a$. Lukua b merkitään $\sqrt[n]{a}$, eli $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Erityisesti n:s juuri on määritelty parittomilla n myös negatiivisille luvuille toisin kuin n:s juuri parillisilla n.

Korkeampien juurten laskeminen tapahtuu tavallisesti laskimella.

Esimerkki 21. Laske.

a) $\sqrt[4]{256}$
b) $\sqrt[5]{-243}$
c) $\sqrt[4]{-8}$

Ratkaisut.

a) Laskimella saadaan $\sqrt[4]{256} = 4$ koska $4^4 = 256$.

b) Laskimella $\sqrt[5]{-243} = -3$, koska $(-3)^5 = -243$.

c) Luvun -8 neljäs juuri $\sqrt[4]{-8}$ ei ole määritelty, koska minkään luvun neljäs potenssi ei ole negatiivinen.

Tehtäviä

59. Laske seuraavat neliöjuuret laskimella.
a) $\sqrt{320}$, b) $\sqrt{15}$, c) $\sqrt{71}$

60. Laske $\sqrt{8100}$ päässä ajattelemalla juurrettava luku sopivana tulona.

61. Etsi luku $a > 0$ jolle $a^4 = 83521$.

62. Oletetaan että suorakaiteen leveyden suhde korkeuteen on 2 ja suorakaiteen pinta-ala on 10. Mikä on suorakaiteen leveys ja korkeus?

63. Ajatellaan suorakulmaista hiekkakenttää, jonka pinta-ala on aari (100 m^2). Lyhyemmän ja pidemmän sivujen pituuksien suhde on 4:3. Laske Pythagoraan lauseen avulla matka hiekkakentän kulmasta kauimmaisena olevaan kulmaan.

64. Laske. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{-64}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{-64}$

65. Laske. a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\sqrt[5]{32}$ d) $\sqrt[5]{-32}$

66. Laske luvun 10 potensseja: $10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$ Kuinka monta nollaa on luvussa 10^n? Laske sitten $\sqrt[6]{1\ 000\ 000}$ ja $\sqrt[10]{10\ 000\ 000\ 000}$.

67. Onko annettu juuri määritelty kaikilla luvuilla a? Millaisia arvoja juuri voi saada luvusta a riippuen?
a) $\sqrt[4]{a^2}$ b) $\sqrt[4]{-a^2}$ c) $\sqrt[4]{(-a)^2}$ d) $-\sqrt[4]{a^2}$

68. Onko annettu juuri määritelty kaikilla luvuilla a? Millaisia arvoja juuri voi saada luvusta a riippuen?
a) $\sqrt[5]{a^2}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$ c) $\sqrt[5]{-a^2}$ d) $-\sqrt[5]{a^2}$

69. Sievennä $(3 + \sqrt{3}x)^4 : (\sqrt{3} + x)^3$.

70. (YO 1888 1) Mikä on a/b:n arvo, jos
$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{2}$?

Luku 7 Murtopotenssi

Seuraavaksi tutkitaan potenssin käsitteen laajentamista tilanteeseen, jossa eksponenttina on murtoluku. Esimerkiksi voidaan pohtia, mitä tarkoittaa merkintä $2^{\frac{1}{3}}$? Potenssin laskusääntöjen perusteella

$$(2^m)^n = 2^{mn}, \text{ kun } m,n \in \mathbb{Z}.$$

Siten on luonnollista ajatella, että murtopotenssille $2^{\frac{1}{3}}$ pätee

$$(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Koska luvun 2 kuutiojuuri toteuttaa yhtälön $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, täytyy siis asettaa $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Yleisemmin asetetaan $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, kun n on positiivinen kokonaisluku ja $a \geq 0$.

Kaavan on edelleen luontevaa ajatella yleistyvän niin, että esimerkiksi

$$(2^{\frac{1}{3}})^2 = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Yleisemmin otetaan murtopotenssin $a^{\frac{m}{n}}$ määritelmäksi

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m,$$

kun m ja n ovat kokonaislukuja ja $n > 0$.

Murtopotenssimerkinnät

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \text{ kun } a \geq 0.$$

Erityisesti $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \text{ kun } a \geq 0.$$

Kun murtolukueksponentit määritellään näin, kaikki aikaisemmat potenssien laskusäännöt ovat sellaisenaan voimassa myös niille. Esimerkiksi kaavat

$$a^q \cdot a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^q = a^q b^q$$

pätevät kaikille rationaaliluvuille p ja q. Näiden kaavojen todistukset on esitetty liitteessä C.

Huomautus määrittelyjoukosta. Murtopotenssimerkintää käytettäessä vaaditaan, että $a \geq 0$ myös silloin, kun n on pariton. Syy tähän on seuraava. Esimerkiksi $\sqrt[3]{-1} = -1$, koska $(-1)^3 = -1$, mutta lauseketta $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ei ole tällöin määritelty. Murtopotenssimerkinnän määrittelystä voi tällöin seurata yllättäviä ongelmia:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Luvun $\frac{1}{3}$ lavennus muotoon $\frac{2}{6}$ on ongelman ydin, mutta murtolukujen lavennussäännöistä luopuminen olisi myös hankalaa. Siksi sovitaan, ettei murtopotenssimerkintää käytetä, jos kantaluku on negatiivinen.

Esimerkki 22. Muuta lausekkeet $\sqrt[5]{3}$ ja $(\sqrt[4]{a})^7$ murtopotenssimuotoon.

Ratkaisu.

$\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$,
$(\sqrt[4]{a})^7 = (a^{\frac{1}{4}})^7 = a^{\frac{7}{4}}$

Esimerkki 23. Sievennä lauseke $8^{\frac{2}{3}}$.

Ratkaisu. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

Tehtäviä

Muuta lausekkeet murtopotenssimuotoon.

71. a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[6]{a}$ c) $\sqrt[n]{a}$

72. a) $(\sqrt[3]{b})^6$ b) $(\sqrt[6]{b^3})$ c) $(\sqrt[5]{b})^2$ d) $(\sqrt[16]{4})$

Sievennä.

73. a) $x^{\frac{1}{5}}$ b) $x^{\frac{4}{3}}$ c) $x^{\frac{8}{4}}$ d) $x^{\frac{25}{100}}$

74. a) $9^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $4^{\frac{3}{2}}$ d) $81^{\frac{3}{4}}$

75. a) $x^{-\frac{1}{3}}$ b) $x^{\frac{5}{-2}}$ c) $x^{3\frac{1}{2}}$ d) $x^{2\frac{-4}{-7}}$

76. a) $4^{\frac{3}{4}}$ b) $2^{\frac{5}{1}}$ c) $16^{\frac{2}{3}}$ d) $5^{\frac{5}{3}}$

Muuta murtopotenssimuotoon.

77. a) $\sqrt{\sqrt{k}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{k}}$ c) $\sqrt{m\sqrt{m}}$ d) $\sqrt[5]{m\sqrt[7]{m}}$

78. a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha}^2}$ b) $\sqrt[5]{q^2\sqrt{q}}$ c) $\left(\sqrt{\sqrt[4]{\ }}\right)^3$

79. [$\star$] Tutki laskimella, miten laskutoimitukset

$$x^x, \quad x^{x^x}, \quad x^{x^{x^x}}, \quad \ldots$$

käyttäytyvät, kun eksponenttien määrää kasvatetaan mielivaltaisen suureksi. a) Tutki arvoja $x = 1{,}3$, $x = 1{,}7$ ja $x = 0{,}05$. b) Millä luvun x positiivisilla arvoilla potenssitornien arvot vakiintuvat tiettyyn lukuun?

80. [$\star$] Potenssitornissa $x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ on äärettömän monta päällekkäistä eksponenttia. Yhtälöllä

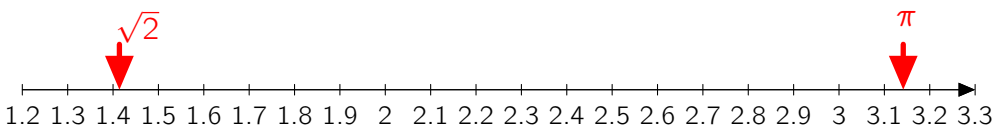
$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

on yksi ratkaisu. Etsi se.

Luku 8 Reaaliluvut

Joskus yksinkertaisen geometrisen ongelman ratkaisu voi olla luku, jota ei voida esittää rationaalilukuna. Siksi on tarpeen tutkia lukuja, jotka eivät ole rationaalilukuja. Tällaisia lukuja kutsutaan *irrationaaliluvuiksi*.

Esimerkiksi $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku, mikä todistetaan luvun lopussa. Toinen tuttu peruskoulusta tuttu irrationaaliluku on ympyrän kehän pituuden suhde halkaisijaan: π.



Rationaalilukuja ja irrationaalilukuja kutsutaan yhdessä *reaaliluvuiksi*. Reaalilukujen joukkoja merkitään $\mathbb{R}$.

Rationaaliluvuilla voidaan approksimoida irrationaalilukuja mielivaltaisen tarkasti. Esimerkiksi π voidaan kirjoittaa halutusta tarkkuudesta riippuen seuraaviin muotoihin:

$$3, \quad 3{,}1, \quad 3{,}14, \quad 3{,}145, \quad 3{,}1459, \quad 3{,}14592, \quad 3{,}145926, \ldots$$

Rationaaliluvut eivät ns. täytä koko lukusuoraa, mutta niitä on niin tiheästi, että jokaista irrationaaliluku voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti jollain rationaaliluvulla.

kuva tähän lukusuorasta, jolla on neliöjuuri 2 ja sen vieressä rationaalilukuja yhä lähempänä ja lähempänä - ne approksimoivat neliöjuuri kakkosta

Vaikka menisimme kuinka lähelle jotain irrationaalilukua lukusuoralla, välistä löytyisi vielä jokin rationaaliluku.

Kaikki rationaalilukuja koskevat laskusäännöt pätevät myös reaaliluvuille.

Tämän perusteleminen on valitettavasti liian pitkällinen asia lukion ykköskurssille.

Siinä missä rationaalilukujen desimaaliesitykset ovat päättyviä tai jaksollisia, ovat irrationaalilukujen desimaaliesitykset päättymättömiä ja jaksottomia. Monissa tapauksissa on hyvin vaikeaa osoittaa luku irrationaaliseksi. Tällöin vaaditaan keinoja, jotka eivät kuulu tämän kurssin laajuuteen.

Luvun

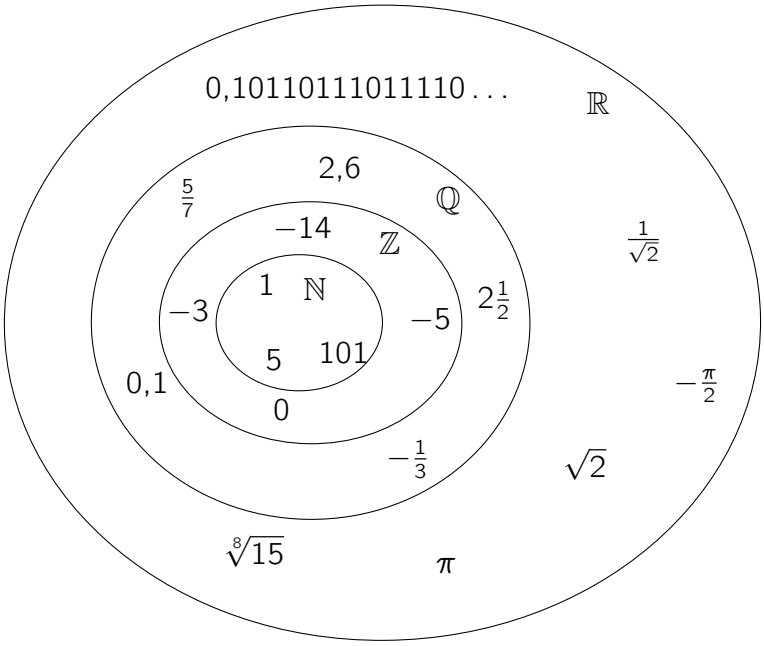
$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488016887242 09\ldots$$

desimaaliesityksessä on kyllä toistuvia kohtia, esimerkiksi numeropari 88 esiintyy kahdesti. Siinä ei kuitenkaan ole jaksoa, jonka luvut toistuisivat yhä uudestaan samassa järjestyksessä, kuten luvussa $3{,}80612312312312\ldots$.

Reaalilukujen ominaisuuksista kerrotaan lisää liitteessä E.

Reaalilukujen myötä kaikki lukiokursseissa esiintyvät lukujoukot on nyt esitelty. Ne on lueteltu seuraavassa:

Joukko	Symboli	Mitä ne ovat
Luonnolliset luvut	$\mathbb{N}$	Luvut 0, 1, 2, 3, ...
Kokonaisluvut	$\mathbb{Z}$	Luvut ... -2, -1, 0, 1, 2 ...
Rationaaliluvut	$\mathbb{Q}$	Luvut, jotka voidaan esittää murtolukuina
Reaaliluvut	$\mathbb{R}$	Kaikki lukusuoran luvut
		eli kaikki desimaaliluvut



Lukualueita voidaan laajentaa lisää vielä tästäkin, esimerkiksi *imaginaariluvut* ovat lukuja, jotka eivät ole reaalilukuja, vaan lukuja, joita ei voi edes sijoittaa lukusuoralle. Reaalilukuja ja imaginaarilukuja kutsutaan yhdessä *kompleksiluvuiksi*.

Kompleksilukuja tarvitaan mm. insinöörialoilla yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa. Esimerkiksi vaihtosähköpiirien analyysissä, signaalinkäsittelyssä ja säätötekniikassa käytetään runsaasti kompleksilukuja. Kompleksiluvut ovat tärkeitä myös matematiikan tutkimuksessa itsessään.

81. Ovatko seuraavat luvut rationaalilukuja vai irrationaalilukuja? Kunkin desimaalit noudattavat yksinkertaista sääntöä.

a) 0,123456789101112131415...

b) 2,4151151151151151151 15 . . .

c) 1,0100100010000100000 10 . . .

82. Mikä on pienin lukua -3 suurempi luku

a) kokonaislukujen b) luonnollisten lukujen c) reaalilukujen joukossa?

83. [$\star$] Osoita, että

a) jokaisen kahden rationaaliluvun välissä on rationaaliluku

b) jokaisen kahden rationaaliluvun välillä on irrationaaliluku

c) jokaisen kahden irrationaaliluvun välissä on rationaaliluku

d) jokaisen kahden irrationaaliluvun välissä on irrationaaliluku.

e) Perustele edellisten kohtien avulla, että minkä tahansa kahden luvun välissä on äärettömän monta rationaali- ja irrationaalukua.

Luku 9 Kertaus

Osa II Yhtälöt

Luku 10 Yhtälö

Monissa käytännön tilanteissa jokin suure voidaan päätellä tai laskea kahdella eri tavalla. Nämä tavat voidaan merkitä lukuina tai kirjoittaa lausekkeiksi. Merkitsemällä näin saadut lukuarvot ja lausekkeet yhtäsuuriksi saadaan *yhtälö*. Yhtälö on siis kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus. Yhtälöitä esiintyy usein käytännön tilanteissa.

Esimerkki 24. Merkitään lausekkeet $5x + \sqrt{x}$ ja $7x + 7$ yhtäsuuriksi, jolloin saadaan yhtälö $5x + \sqrt{x} = 7x + 7$.

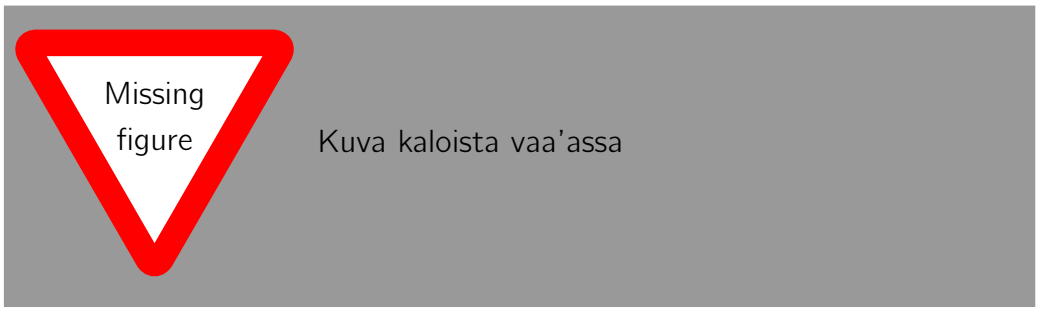
Jos yhtälön kummankin puolen lausekkeen arvo on sama, sanotaan että *yhtälö pätee*.

Esimerkki 25. a) Yhtälö $3x + 2 = 0$ pätee, kun $x = -\frac{2}{3}$.

b) Yhtälö $5 = 3$ ei päde.

Esimerkki 26. Kuvassa oleva vaaka on tasapainossa. Toisessa vaakakupissa on kahden kilon siika ja toisessa puolen kilon ahven sekä tuntematon määrä lakritsia. Kuinka paljon vaakakupissa on lakritsia?

kahden kilon siika -esimerkin ratkaisu



Ratkaisu.

Merkitään lakritsin määrää tuntemattomalla x. Tilannetta kuvaa yhtälö

$$2 = 0{,}5 + x. \tag{10.1}$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 2 &= 0{,}5 + x && \mid -0{,}5 \\ 2 - 0{,}5 &= x \\ 1{,}5 &= x \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Vastaus. Lakritsia on 1,5 kg.

lisää yhtälöesimerkkejä

- Yhtälössä esiintyy yleensä *tuntemattomia*, joiden arvoa ei tiedetä ja joita merkitään eri symboleilla. Jos tuntemattomia on vain yksi, sitä merkitään yleensä kirjaimella x.
- Niitä tuntemattoman x arvoja, joilla yhtälö pätee, kutsutaan yhtälön *ratkaisuiksi*.
- Yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan kaikkien yhtälön ratkaisujen selvittämistä.

jokin helposti ymmärrettävä esimerkki tuntemattomista

Tyypillinen tapa ratkaista yhtälöitä on kirjoittaa ne ilmaistuna toisella tavalla. Käytännössä se tarkoittaa sitä, että niitä muokkaa siten, ettei alkuperäisen yhtälön paikkansapitävyys muutu. Tällaisia sallittuja muunnoksia ovat esimerkiksi:

- Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä tai molemmilta puolilta voidaan vähentää luku. Esimerkiksi yhtälö $3x + 5 = 3$ saadaan näin muotoon $3x = -2$.
- Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa nollasta poikkeavalla luvulla. Esimerkiksi kertomalla yhtälön $2x = 4$ molemmat puolet luvulla $\frac{1}{2}$ saadaan yhtälö $x = 2$.

Kuvitellaan orsivaaka, joka on tasapainossa. Vasemmalla ja oikealla puolella on eripainoisia esineitä, mutta ne painavat yhteensä yhtä paljon. Jos molemmille puolille lisätään nyt saman verran painoa, vaaka on yhä tasapainossa. Samalla tavalla yhtälön molemmille puolille on sallittua lisätä sama luku.

Yhtälöt ratkeavat siten, että niitä muokataan, kunnes vastauksen voi lukea siitä suoraan, esim $x = 3$.

Yhtälöitä on kolmenlaisia:

1. Yhtälö, joka on aina tosi. Esimerkiksi yhtälöt $8 = 8$ ja $x = x$.
2. Yhtälö, joka on joskus tosi. Esimerkiksi yhtälö $x + 4 = 7$ on tosi, kun $x = 3$, ja epätosi muulloin.
3. Yhtälö, joka ei ole koskaan tosi. Esimerkiksi yhtälö $0 = 1$.

Tärkeimpiä näistä ovat joskus todet yhtälöt.

Yleisiä yhtälönratkaisuperiaatteita:

- Kerro tuntematonta sisältävät lausekkeet pois nimittäjistä.
- Yhdistä useat murtolausekkeet yhdeksi laventamalla.
- Yhdistä tuntemattomat.
- Kumoa juuret korottamalla yhtälö puolittain sopivaan potenssiin.
- Sulkuja ei välttämättä aina kannata kertoa auki.
- Yhtälö on ratkaistu vasta, kun jäljellä on enää vain yksi kappale tuntematonta suuretta, ja se sijaitsee yksin omalla puolellaan yhtälöä.

Siirrymme nyt tarkastelemaan tärkeää yhtälöiden lajia, ensimmäisen asteen yhtälöitä.

Luku 11 Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka on esitettävissä muodossa $ax + b = 0$, jossa $a \neq 0$.

Yhtälötyypin nimi tulee siitä, että korkein potenssi, johon tuntematon x yhtälössä korotetaan, on 1.

Esimerkki 27. Muun muassa seuraavat yhtälöt ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä:

a) $2x = 4$

b) $5x + 3 = 0$

c) $x + 2 = 3x - 4$

Ensimmäisen asteen yhtälö ratkaistaan siirtämällä ensin tuntemattoman x sisältävät termit yhtälön vasemmalle puolelle ja vakiotermit oikealle puolelle. Tämän jälkeen yhtälö jaetaan puolittain tuntemattoman x kertoimella.

/todoonko 1. asteen yhtälönratkaisun laatikossa käytettävä "siirtää toiselle puolelle" ehkä kuitenkin voi olla noin

Esimerkki 28. Yhtälön $7x + 4 = 4x + 7$ ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} 7x + 4 &= 4x + 7 && \mid \text{Vähennetään molemmilta puolilta } 4x. \\ 3x + 4 &= 7 && \mid \text{Vähennetään molemmilta puolilta } 4. \\ 3x &= 3 && \mid \text{Jaetaan molemmat puolet luvulla } 3. \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus. $x = 1$

Ensimmäisen asteen yhtälöllä on aina täsmälleen yksi ratkaisu.

Teoreema 1. Kaikki muotoa $ax + b = cx + d$ olevat yhtälöt, joissa $a \neq c$, ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä.

Todistus.

$$\begin{aligned} ax + b &= cx + d && \mid \text{Vähennetään molemmilta puolilta } cx + d. \\ ax + b - (cx + d) &= 0 && \mid \text{Järjestellään termejä uudelleen.} \\ ax - cx + b - d &= 0 && \mid \text{Otetaan yhteinen tekijä.} \\ (a - c)x + (b - d) &= 0 \end{aligned}$$

Tämä on määritelmän mukainen ensimmäisen asteen yhtälö, koska $a \neq c$. $\square$

Esimerkki 29. Yleinen lähestymistapa muotoa $ax + b = cx + d$ olevien yhtälöiden ratkaisuun:
(1) Vähennä molemmilta puolilta cx. Saat yhtälön $(a - c)x + b = d$.
(2) Vähennä molemmilta puolita b. Saat yhtälön $(a - c)x = d - b$.
(3) Jaa $(a - c)$:llä. Saat yhtälön ratkaistuun muotoon $x = \frac{d-b}{a-c}$.

Tehtäviä

84. Mitä yhtälölle $ax + b = 0$ tapahtuu, jos kerroin a saa arvon nolla? Onko yhtälöllä ratkaisuja?

85. Ratkaise:

a) $x + 4 = 5$
b) $1 - x = -3$
c) $7x = 35$
d) $-2x = 4$
e) $10 - 2x = x$
f) $9x + 4 = 6 - x$
g) $\frac{2x}{5} = 4$
h) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{5}{6} - x$

86. Ratkaise kysytty tuntematon yhtälöstä

a) $F = ma$, $m =$? (Voima on massa kerrottuna kiihtyvyydellä.)
b) $p = \frac{F}{A}$, $F =$? (Paine on voima jaettuna alalla.)
c) $A = \pi r^2$, $r =$? (Ympyrän pinta-ala on pii kerrottuna säteen neliöllä.)
d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $h =$? (Kartion tilavuus on piin kolmasosa kerrottuna säteen neliöllä ja kartion korkeudella.)

87. Kännykkäliittymän kuukausittainen perusmaksu on 2,90 euroa. Lisäksi jokainen puheminuutti ja tekstiviesti maksaa 0,69 senttiä. Pekan kännykkälasku kuukauden ajalta oli 27,05 euroa.

a) Kuinka monta puheminuuttia/tekstiviestiä Pekka käytti kuukauden aikana?
b) Pekka lähetti kaksi tekstiviestiä jokaista viittä puheminuuttia kohden. Kuinka monta tekstiviestiä Pekka lähetti?

88. Sadevesikeräin näyttää vesipatsaan korkeuden millimetreinä. Eräänä aamuna keräimessä oli 5 mm vettä. Seuraavana aamuna samaan aikaan keräimessä oli 23 mm vettä. Muodosta yhtälö ja selvitä, kuinka paljon vettä oli keskimäärin satanut kuluneen vuorokauden aikana tunnissa.

Luku 12 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Kaksi muuttujaa voivat riippua toisistaan monin eri tavoin. Tavallisia riippuvuuden tyyppejä ovat suoraan ja kääntäen verrannollisuus.

Kaksi muuttujaa x ja y ovat suoraan verrannolliset, jos toinen saadaan toisesta kertomalla se jollakin vakiolla, eli $y = kx$. Vakiota k kutsutaan *verrannollisuuskertoimeksi*.

Jos suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset, niin tätä merkitään $x \sim y$ tai $x \propto y$.

Suoraan verrannollisuus voidaan tunnistaa esimerkiksi laskemalla muuttujien suhde ja toteamalla, että se on muuttujista riippumaton vakio.

Esimerkki 30. Banaanien kilohinta on 2,00 euroa. Seuraavassa taulukossa on banaanien paino[1], jonka saa ostettua tietyllä rahamäärällä:

Hinta (euroa)	Paino (kg)	Hinta/paino (euroa/kg)
1,00	0,50	2,00
2,00	1,00	2,00
3,00	1,50	2,00
4,00	2,00	2,00

Hinnan ja painon suhde on vakio, 2,00 euroa/kg, joten ostettujen banaanien paino ja niihin käytetty rahamäärä ovat suoraan verrannolliset.

1. Fysikaalisesti kyse on massasta, mutta arkikielessä käytetään sanaa paino.

Suoraan verrannollisuutta voidaan kuvata myös niin, että jos toinen muuttujista kaksinkertaistuu, niin toinenkin kaksinkertaistuu. Samoin jos toisen muuttujan arvo puolittuu, toisenkin arvo puolittuu.

Jos suoraan verrannollisista muuttujista piirretään kuvaaja, pisteet asettuvat suoralle:

Kuva, johon piirretty vaaka-akselille käytetty rahamäärä ja pystyakselille ostettujen banaanien paino.

Suoraan verrannollisia muuttujia ovat myös esimerkiksi

- aika ja kuljettu matka, kun liikutaan vakionopeudella, tai
- kappaleen massa ja painovoiman kappaleeseen aiheuttama voima.

Suoraan verrannollisuutta monimutkaisempi riippuvuus on kääntäen verrannollisuus.

Muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannolliset, jos toinen saadaan toisesta jakamalla jokin vakio sillä, eli $y = \frac{a}{x}$.

Kääntäen verrannollisuus voidaan tunnistaa esimerkiksi kertomalla muuttujien arvoja keskenään ja huomaamalla, että tulo on muuttujista riippumaton vakio.

Esimerkki 31. Nopeus ja matkaan tarvittava aika ovat kääntäen verrannolliset. Jos kuljettavana matkana on 80 km, voidaan nopeudet ja matka-ajat kirjoittaa taulukoksi:

Nopeus (km/h)	Matka-aika (h)	Nopeus·matka-aika (km)
40	2	80
80	1	80
100	0,8	80

Tulo on aina 80 km, joten nopeus ja matka-aika ovat kääntäen verrannolliset.

Kääntäen verrannollisuutta voidaan kuvata myös niin, että jos toinen muuttujista kaksinkertaistuu, toinen puolittuu.

Jos kääntäen verrannollisista muuttujista piirretään kuvaaja, pisteet muodostavat laskevan käyrän:

Kuva, johon on piirretty matka-aika ja nopeus (yllä olevan taulukon mukaisesti).

Kääntäen verrannollisia muuttujia ovat myös esimerkiksi

- kaivamistyön suorittamiseen kuluva aika ja työntekijöiden lukumäärä.

Tehtäviä

89. Tutkitaan seuraavia muuttujapareja:

1. Neliön sivun pituus ja neliön pinta-ala.
2. Kuljettu matka ja kulunut aika, kun nopeus on vakio.
3. Dieselin hinta ja 50 eurolla saatavan dieselin määrä.
4. Irtomyynnistä ostetun suolakurkkuerän paino ja hinta.

Miten toinen muuttuja muuttuu ensimmäisen kaksinkertaistuessa tai puolittuessa? Ovatko muuttujat suoraan tai kääntäen verrannolliset vai eivät kumpaakaan?

90. Ratkaise

1. $\frac{x}{3} = 1$
2. $\frac{8}{x} = 2$

3. $\frac{7}{x} = \frac{16}{8}$
4. $\frac{x}{3} = \frac{1}{7}$

91. Muodosta seuraavia tilanteita kuvaavat yhtälöt.

1. Kultakimpaleen arvo (x) on suoraan verrannollinen sen massaan (m), eli mitä painavampi kimpale on, sitä enemmän siitä saa rahaa.
2. Aidan maalaamiseen osallistuvien ihmisten määrä x on kääntäen verrannollinen maalaamiseen kuluvaan aikaan (t). Toisin sanoen, mitä enemmän maalaajia, sitä nopeammin homma on valmis.
3. Planeettojen toisiinsa aiheuttama vetovoima (F) on suoraan verrannollinen planeettojen massoihin (m_1 ja m_2) ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden (r) neliöön.

92. Rento pyöräilyvauhti kaupunkiolosuhteissa on noin 20 km/h. Lukiolta urheiluhallille on matkaa 7 km. Kuinka monta minuuttia kestää arviolta pyöräillä lukiolta urheiluhallille?

93. Isä ja lapset ovat ajamassa mökille Sotkamoon. On ajettu jo neljä viidesosaa matkasta, ja aikaa on kulunut kaksi tuntia. ”Joko ollaan perillä?” lapset kysyvät takapenkiltä. Kuinka pitkään vielä arviolta kuluu, ennen kuin ollaan mökillä?

94. Äidinkielen kurssilla annettiin tehtäväksi lukea 300-sivuinen romaani. Eräs opiskelija otti aikaa ja selvitti lukevansa vartissa seitsemän sivua. Kuinka monta tuntia häneltä kuluu koko romaanin lukemiseen, jos taukoja ei lasketa?

Luku 13 Prosenttilaskenta

Sana prosentti tulee latinan kielen sanoista pro centum, mikä tarkoittaa kirjaimellisesti sataa kohden. Prosentteja käytetään ilmaisemaan suhteellista osuutta. Prosentin merkki on %.

1 prosentti $= 1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Esimerkki 32.

- $6\ \% = \frac{6}{100} = 0{,}06$
- $48{,}2\ \% = \frac{48{,}2}{100} = 0{,}482$
- $140\ \% = \frac{140}{100} = 1{,}40$

tehtävä: ilmaise desimaalilukuna seuraavat prosentit

Lukua, josta suhde lasketaan, kutsutaan *perusarvoksi*.

Esimerkki 33. Jos sadan euron hintaisen tuotteen hintaa on alennettu 25 prosenttia, niin alennettu hinta on 75 euroa. Jos sen sijaan alkuperäinen hinta nousee 15 prosenttia, niin tuotteen uusi hinta on 115 euroa. Perusarvo on molemmissa tapauksissa 100 euroa.

kuva suorakaiteesta, joka kuvaa perusarvoa (se voi olla vaik 10x10 pientä laatikkoa. Sit kuva, jossa peruarvosta on vähennetty 25 % perusarvosta, eli 75 laatikkoa. Sit kuva, jossa perusarvoon on lisätty 15 %, eli 115 laatikkoa. Sit sopivat havainnollistavat väritykset

tehtävä perusarvosta

Prosentteja käytetään usein ilmaisemaan suureiden muutoksia, esimerkiksi luku b kasvaa luvuksi a. *Muutosprosenttia* laskettaessa muutoksen suuruttaa verrataan alkuperäiseen lukuun. Perusarvona on siis alkuperäinen arvo, johon nähden muutos on tapahtunut.

Jos kysytään, kuinka monta prosenttia a on isompi b:tä, se tarkoittaa samaa, kuin kuinka monta b:n sadasosaa on se määrä, jolla a on suurempi b:tä. Toisin sanoen kuinka monta b:n sadasosaa mahtuu $a - b$:hen. Se saadaan laskemalla

$$\frac{a-b}{\frac{b}{100}} = \frac{a-b}{b} \cdot 100$$

Samalla tavalla saadaan laskettua, kuinka monta prosenttia luku kasvoi, kun se muuttui a:sta b:hen.

Esimerkki 34. Vesan paino on tammikuussa 68 kg ja kesäkuussa 64 kg. Kuinka monta prosenttia Vesa on laihtunut?

Ratkaisu.

Lasketaan

$$\frac{68-64}{68} = \frac{4}{68} = 0{,}06 = 6\ \%$$

Vastaus.

Vesa on laihtunut 6 %.

95. Oppikirjamaraton-tiimi kävi lounastamassa. Osoita oheisen kuitin tiedoilla vääräksi yleinen virhekäsitys, että 13 %:n arvonlisävero olisi 13 % lopullisesta myyntihinnasta.

Vertailuprosentilla ilmaistaan, kuinka monta prosenttia luku on jostain toisesta luvusta. Vertailuprosentin laskennassa käytetään perusarvona sitä lukua, johon verrataan.

Jos kysytään, kuinka monta prosenttia b on a:stä, se tarkoittaa samaa, kuin kuinka monta a:n sadasosaa b on. Toisin sanoen kuinka monta a:n sadasosaa b:hen mahtuu. Se saadaan laskemalla

$$\frac{b}{\frac{a}{100}} = \frac{b}{a} \cdot 100$$

havainnollistava kuva vertailuprosentista suorakulmioiden avulla

Esimerkki 35. Vesa ansaitsee kuukaudessa 2 300 euroa ja Antero 1 700 euroa. Kuinka monta prosenttia Anteron tulot ovat Vesan tuloista?

Ratkaisu.

Lasketaan

$$\frac{1700}{2300} \approx 0{,}74 = 74\ \%.$$

Laskuissa käytettävä perusarvo on Vesan palkka eli 2300 euroa.

Vastaus.

74 %

Prosenttiyksikkö mittaa prosenttiosuuksien välisiä eroja. Esimerkiksi 4 % on 2 prosenttiyksikköä suurempi kuin 2 %, mutta 100 % suurempi kuin 2 %. Jos prosenttiluku muuttuu, muutos voidaan ilmaista joko prosentteina tai prosenttiyksikköinä.

Esimerkki 36. Tuotteen markkinaosuus on vuoden tammikuussa 10 % ja kesäkuussa 15 %.

a) Kuinka monta prosenttia tuotteen markkinaosuus on noussut?

b) Kuinka monta prosenttiyksikköä tuotteen markkinaosuus on noussut?

Ratkaisu.

a) Tuotteen markkinaosuus on noussut

$$\frac{15-10}{10} = \frac{5}{10} = 50\ \%.$$

b) Tuotteen markkinaosuus on noussut $15 - 10 = 5$ prosenttiyksikköä.

Vastaus.

a) 50 prosenttia

b) 5 prosenttiyksíkköä.

Tehtäviä

96. Laukun normaalihinta on 225 euroa, ja se on 25 %:n alennuksessa. Mikä on alennettu hinta?

97. Jaakon kuukausipalkka on 1623,52 euroa. Hän saa 1,3 % palkankorotuksen. Mikä on Jaakon kuukausipalkka korotuksen jälkeen?

98. Kirjan myyntihinta, joka sisältää arvolisäveron, on 9 % suurempi kuin kirjan veroton hinta. Laske kirjan veroton hinta, kun myyntihinta on 27 €.

99. Sokerijuurikkaassa on 18 % sokeria. Kuinka paljon sokerijuurikkaita tarvitaan valmistettaessa 8 tonnia sokeriliuosta, jonka sokeripitoisuus on 4,5 %?

100. Perussuomalaisten kannatus oli vuoden 2007 eduskuntavaaleissa 4,1 % ja vuoden 2011 eduskuntavaaleissa 19,1 %. Kuinka monta prosenttiyksikköä kannatus nousi? Kuinka monta prosenttia kannatus nousi?

101. Askartelukaupassa on alennusviikot, ja kaikki tavarat myydään 60 %:n alennuksella. Viimeisenä päivänä kaikista hinnoista annetaan vielä lisäalennus, joka lasketaan aiemmin alennetusta hinnasta. Minkä suuruinen lisäalennus tulee antaa, jos lopullisen kokonaisalennuksen halutaan olevan 80 %?

102. Hedelmissä on vettä aluksi 60 %. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta hedelmissä tämän jälkeen olisi vain 20 % vettä?

103. Erään pankin myöntämä opintolaina kasvaa korkoa 2 % vuodessa. Kuinka monta prosenttia laina on kasvanut korkoa alkuperäiseen verrattuna kymmenen vuoden kuluttua?

104. Samulin pituus on 165 cm ja Joonaksen 173 cm.

1. Kuinka monta prosenttia Samulin pituus on Joonaksen pituudesta?
2. Kuinka monta prosenttia Samuli on lyhyempi kuin Joonas?
3. Kuinka monta prosenttia Joonas on pidempi kuin Samuli?

105. Yleinen arvonlisäveroprosentti oli Suomessa vuonna 2012 23 % tuotteen verottomasta hinnasta. Tuotteen hinta koostuu sen verottomasta hinnasta ja tuotteesta maksettavasta arvonlisäverosta. Kuinka monta prosenttia arvonlisävero on tuotteen myyntihinnasta?

106. Kun matkalipun hintaa korotettiin 10,0 %, matkustajien määrä väheni 10,0 %. Kuinka monella prosentilla tällöin lisääntyivät tai vähentyivät liikennöitsijän lipputulot?

107. Tuoreissa omenissa on vettä 80 % ja sokeria 4 %. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20? [K2000, 4]

108. Kappaleen putoamisen kesto maahan korkeudelta x on kääntäen verrannollinen putoamiskiihtyvyyden g neliöjuureen. Vakio g on kullekin taivaankappaleelle ominainen ja eri puolilla taivaankappaletta likimain sama. Empire State Buildingin katolta (korkeus 381 m) pudotetulla kuulalla kestää n. 6,2 s osua maahan. Marsin putoamiskiihtyvyys on 37,6 % Maan putoamiskiihtyvyydestä.

Jos Empire State Building sijaitsisi Marsissa, kuinka monta prosenttia pitempi aika kuluisi kuulan maahan osumiseen?

109. Matin ja Iidan duo saa julkisuutta, ja he alkavat myydä CD-levyään keikkojen yhteydessä 10 euron kappalehinnalla. Jonkin ajan päästä he päättävät laskea CD:n hintaa 20 prosenttia. Matti alkaa kuitenkin katua päätöstä, ja ehdottaa tämän alennetun hinnan korottamista 20 prosentilla. Mikä olisi tämän toimenpiteen jälkeen CD:n uusi hinta? Montako prosenttia olisi korotuksen oltava, jotta oikeasti päästäisiin takaisin alkuperäiseen 10 euron hintaan?

110. Jalkapalloilija Georgios Samaras teki ensimmäisellä kaudellaan Skotlannin valioliigassa (2007-08) 5 maalia Celtic F.C.:n paidassa. Seuraavalla kaudella Samaras teki Celticille liigassa 15 maalia. Kuinka monta prosenttia Samaraksen maalimäärä nousi?

111. Kaupungissa tuli jokaisen talonomistajan suorittaa kaupungin kassaan 5 % saadusta hyyrymäärästä[1]. Sittemmin määrättiin, että mainittu prosentti oli oleva 10. Monellako prosentilla täytyy talonomistajien korottaa hyyryjä saadakseen saman puhtaan säästön kuin ennen? [YO 1877, 4]

1. vuokra, ruotsin sanasta *hyra*

Luku 14 Potenssiyhtälöt

Ensimmäisen asteen yhtälöä $ax + b = 0$ monimutkaisempia yhtälöitä saadaan, kun tuntematon x korotetaan potenssiin.

Potenssiyhtälö on muotoa $x^n = a$, oleva yhtälö, jossa n on positiivinen kokonaisluku. Eksponentin n arvoa kutsutaan potenssiyhtälön *asteeksi*.

Potenssiyhtälöitä tarvitaan esimerkiksi tilanteissa, joissa lasketaan korolle korkoa. Myös pinta-ala- ja tilavuuslaskuissa esiintyy potenssiyhtälöitä.

Esimerkki 37. (a) Yhtälö $27x^3 = 7$ on potenssiyhtälö, sillä jakamalla se puolittain luvulla 27 saadaan $x^3 = \frac{7}{27}$.

(b) Yhtälö $2x^4 - 7 = 3$ on potenssiyhtälö, sillä se voidaan muokata muotoon $x^n = a$,

$$\begin{aligned} 2x^4 - 7 &= 3 \\ 2x^4 &= 3 + 7 \\ x^4 &= \frac{10}{2} \\ x^4 &= 5. \end{aligned}$$

(c) Yhtälö $x^{\frac{3}{2}} = 42$ ei ole potenssiyhtälö, sillä eksponentti $\frac{3}{2}$ ei ole kokonaisluku. Yhtälö voidaan kuitenkin kirjoittaa uuden tuntemattoman $z = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ avulla: tällöin saadaan potenssiyhtälö $z^3 = 42$.)

(d) Yhtälö $x^{-2} = 44$ ei ole potenssiyhtälö, sillä -2 ei ole positiivinen kokonaisluku. Sekin voidaan kirjoittaa potenssiyhtälönä, kun merkitään

$z = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Tällöin saadaan yhtälö $z^2 = 44$.)

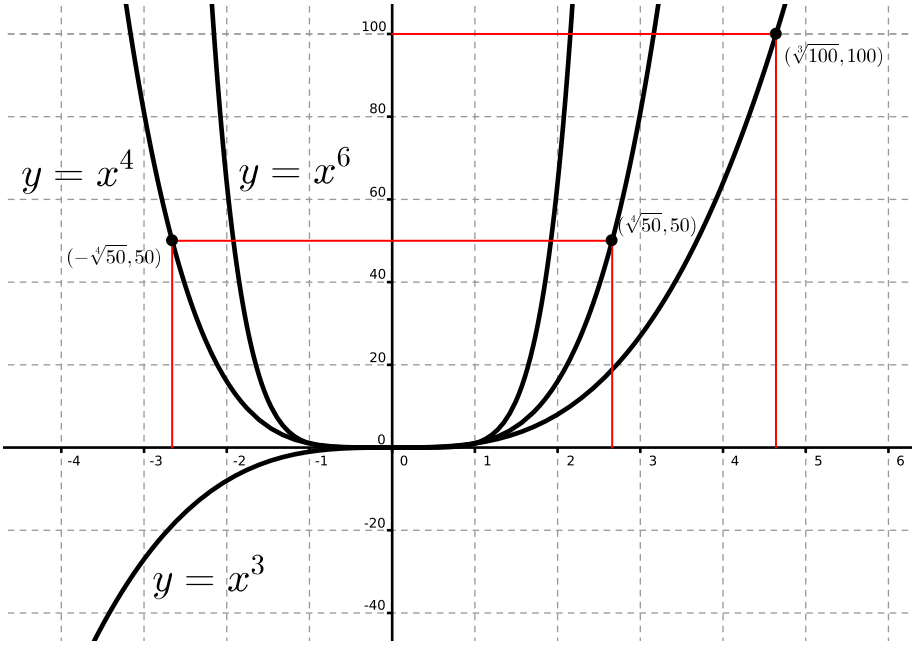
Potenssiyhtälön ratkaiseminen:

- Jos potenssiyhtälön aste n on *parillinen* ja $a \geq 0$, yhtälöllä on kaksi ratkaisua,
$$x = \pm a^{\frac{1}{n}}$$
. ($\pm$ tarkoittaa, että sekä positiivinen että negatiivinen arvo käyvät: ± 5 tarkoittaa sekä lukuja 5 että -5.)
- Jos aste on *pariton*, yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu,
$$x = a^{\frac{1}{n}}.$$
- Jos aste on *parillinen* ja $a < 0$, potenssiyhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.

Esimerkki 38. (a) Potenssiyhtälön $x^3 = 100$ ratkaisu on $x = 100^{\frac{1}{3}} = 4{,}6416\ldots$.

(b) Potenssiyhtälöllä $x^4 = 50$ on kaksi ratkaisua $x = 50^{\frac{1}{4}} = 2{,}6591\ldots$ ja $x = -50^{\frac{1}{4}} = -2{,}6591\ldots$.

(c) Potenssiyhtälöllä $x^6 = -1$ ei ole ratkaisua, sillä $x^4 = (x^3)^2 \geq 0$ kaikille x.



Esimerkki 39. Suursijoittaja Nalle Mursulla on 5 000 euroa ylimääräistä rahaa, jonka hän aikoo sijoittaa 30 vuodeksi. Nalle Mursu haluaa sijoittamansa pääoman kasvavan 100 000 euroksi 30 vuodessa. Kuinka suuren vuotuisen korkokannan Nalle Mursu tarvitsee sijoitukselleen?

Ratkaisu: Olkoon vuotuinen korkokanta r. *Korkoa korolle -periaatten* nojalla 5 000 euron sijoitus kasvaa 30 vuodessa summaksi $5\,000 \cdot (1+r)^{30}$. Merkitsemällä $x = 1 + r$ saamme yhtälön $5000 \cdot x^{30} = 100\,000$. Jakamalla yhtälö puolittain luvulla 5 000 päädymme potenssiyhtälöön

$$x^{30} = 20\,000,$$

jonka ratkaisuksi saadaan $x = 20\,000^{\frac{1}{30}} = 1{,}39\ldots$. Näin ollen suursijoittaja Nalle Mursun vaatima korkokanta sijoitukselleen on noin $r = 1 - x = 1 - 1{,}39 = 0{,}39 = 39\ \%$.

Yhtälöt, jotka ovat muotoa $a \cdot x^n = b$ (joskus myös muotoa $(a \cdot x^n - b = 0)$, ratkaistavuus riippuu useammasta seikasta. Mikäli n on pariton, yhtälö on aina

ratkaistavissa (eli sillä on reaalinen juuri):

$$\begin{aligned} a \cdot x^n &= b \\ x^n &= \frac{b}{a} \\ x &= \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

Esimerkki 40. $2x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = -16 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Mikäli n on parillinen, yhtälö on ratkaistavissa jos ja vain jos $\frac{b}{a} \geq 0$. Parillisella potenssifunktiolla voi olla yksi, kaksi tai ei yhtään ratkaisua.

Esimerkki 41. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\Rightarrow$ Yhtälöllä on yksi ratkaisu.

Esimerkki 42. $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$
$\Rightarrow$ Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, sillä $3^2 = 9$ ja $(-3)^2 = 9$.

Esimerkki 43. $x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{-9}$
$\Rightarrow$ Yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua.

Tehtäviä

112. Ratkaise:
a) $x^2 = 4$ b) $x^3 = 27$ c) $x^5 = -1$ d) $x^2 - 3 = 0$ e) $x^3 + 125 = 0$

113. Ratkaise
a) $5x^2 = 25$ b) $(2x)^3 = 8$ c) $x^4 = \frac{1}{4}$ d) $(3x)^2 = 36$ e) $(4x)^2 - 16 = 0$.

114. Ratkaise potenssiyhtälöt

1. $x^3 = 81$
2. $x^5 = 10$
3. $x^2 = 4$
4. $x^4 = 1$.

115. Ratkaise potenssiyhtälöt

1. $x^4 - 8 = 0$
2. $2x^3 + 7 = 0$
3. $\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} = 1$
4. $1{,}51x^4 - 1{,}2 = 7{,}5$.

116. Muinainen hallitsija Tauno Alpakka rakennuttaa itselleen kuution muotoista palatsia. Palatsin tulee olla 5 000 m^3.

1. Kuinka korkea palatsista tulee?
2. Palatsi päällystetään 10 cm:n paksuisella kultakerroksella. Kuinka monta kiloa kultaa tarvitaan? (Kullan tiheys on $19{,}23 \cdot 10^3$ kg/m^3.)

Luku 15 Kertaus

Osa III Funktiot

Luku 16 Funktio

Usein ollaan kiinnostuneita siitä, millainen yhteys kahden asian välillä on. Funktio on matemaattinen työkalu näiden yhteyksien tarkastelemiseen.

Funktio f liittää *muuttujaan* x arvon $f(x)$.

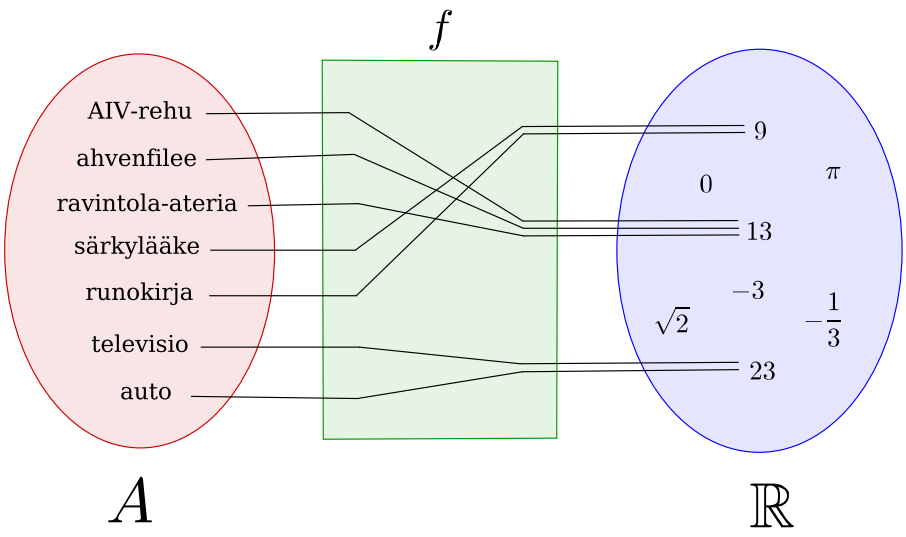
Funktiolla on *määrittelyjoukko* A, johon muuttuja x kuuluu, ja *maalijoukko* B, johon funktion arvot kuuluvat.

Pitäisiköhän tätä funktion määritelmää vielä hioa? Pitäisikö mainita "Funktio on sääntö"?

Esimerkki 44. Hyödykkeen ja siitä maksettavan arvonlisäveron välistä yhteyttä voidaan kuvata funktiolla. Valitaan funktion määrittelyjoukoksi tiettyjen hyödykkeiden joukko,

$$A = \{\text{ahvenfilee, AIV-rehu, auto, runokirja, ravintola-ateria, särkylääke, televisio}\},$$

ja arvojoukoksi reaaliluvut. Funktio voi liittää kuhunkin hyödykkeeseen esimerkiksi siitä maksettavan arvonlisäveroprosentin: $f(\text{särkylääke}) = 9$ ja $f(\text{televisio}) = 23$.



Funktioiden käyttämiseen liittyy joitakin vakiintuneita tapoja:

- $f(x) = y$ lausutaan: "Funktio saa arvon y pisteessä x",
- Funktion määrittely- ja arvojoukko jätetään usein merkitsemättä, jos ne voidaan päätellä asiayhteydestä. Tällä kurssilla arvojoukkona on yleensä reaaliluvut.
- Toisinaan funktiolle ja funktion kuvaajalle ei tehdä selkeää eroa: $y = f(x)$ samaistetaan koordinaatistoon piirretyn funktion kuvaajan kanssa. Periaatteessa funktio ja sen kuvaaja ovat kuitenkin eri asioita.

Funktiolla on usein jokin selkeä sääntö, joka voidaan kirjoittaa matemaattisena lausekkeena.

Esimerkki 45. Jos neliön sivun pituutta merkitään x:llä, voidaan sivun pituuden ja neliön pinta-alan välistä yhteyttä kuvata funktiolla $A(x) = x^2$.

Funktion määrittelyjoukko koostuu niistä muuttujan arvoista, joilla funktio on määritelty eli joilla funktion arvo voidaan laskea.

Esimerkki 46. Määritellään funktio f lausekkeella

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Mikä on funktion määrittelyjoukko?

Ratkaisu. Funktio $f(x)$ on määritelty, kun nimittäjä $x-1$ on erisuuri kuin 0. Tämä toteutuu kaikilla x:n arvoilla lukuun ottamatta arvoa $x=1$. Funktion määrittelyjoukkoon kuuluvat siis kaikki reaaliluvut paitsi luku 1.

Funktion *arvojoukko* sisältää ne maalijoukon alkiot, jotka funktio saa arvokseen ainakin yhdessä pisteessä.

Esimerkki 47. Mikä on edellä määritellyn funktion $f(x)$ arvojoukko?

Ratkaisu. Arvojoukon selvittämiseksi tutkitaan, millä luvun a arvoilla yhtälöllä $f(x)=a$ on ratkaisu,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{x-1} \quad \text{| Oletetaan, että } x \neq 1\text{, jolloin voimme kertoa } (x-1)\text{:llä puolittain.} \\ a(x-1) &= 1 \\ x-1 &= \frac{1}{a} \\ x &= 1+\frac{1}{a} \quad \text{| Havaitaan, että yhtälöllä on ratkaisu kaikilla } a \neq 0. \end{aligned}$$

Funktion arvojoukkona on siis koko reaalilukujen joukko poislukien luku 0.

Tehtäviä

117. Olkoon $f(x)=\frac{2^x+4}{x}$. Laske

a) $f(1)$
b) $f(2)$
c) $f(\frac{1}{2})$
d) $f(\frac{1}{3})$
e) $f(0)$
f) $f(-1)$

118. Millä x:n arvoilla yhtälö $f(f(x))=x$ pätee, kun

a) $f(x)=1$
b) $f(x)=x$

c) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = 2x$

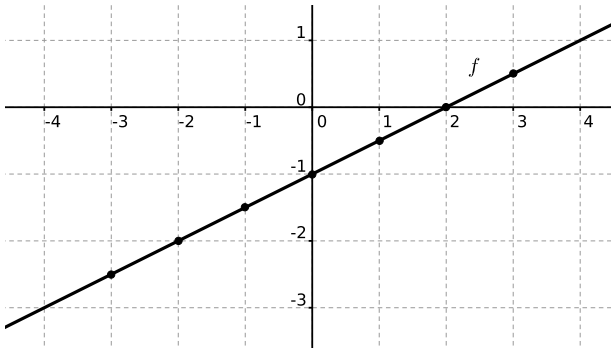
e) $f(x) = 2x + 1$?

Luku 17 Koordinaatisto ja funktion kuvaaja

Funktioita reaaliluvuilta reaaliluvuille voidaan havainnollistaa koordinaatistossa kuvaajien avulla. Funktion f kuvaajassa koordinaatistoon piirretään ne pisteet, joilla y-koordinaatti on f:n arvo sen x-koordinaatissa. Siis kaikilla f:n määrittelyjoukon luvuilla x lasketaan $y = f(x)$ ja piirretään piste (x, y) koordinaatistoon. Funktioita voi piirtää helposti myös graafisilla laskimilla tai tietokoneohjelmilla (esimerkiksi Wolfram Alphalla[1]).

Esimerkki 48. Funktion $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y), joilla pätee $y = \frac{x}{2} - 1$:

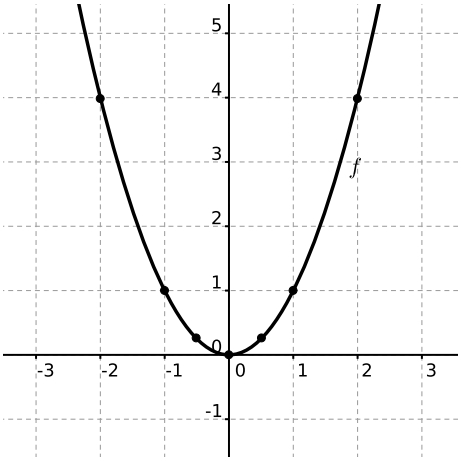
x	$y = f(x)$
-3	$-2{,}5$
-2	-2
-1	$-1{,}5$
0	-1
1	$-0{,}5$
2	0
3	$0{,}5$



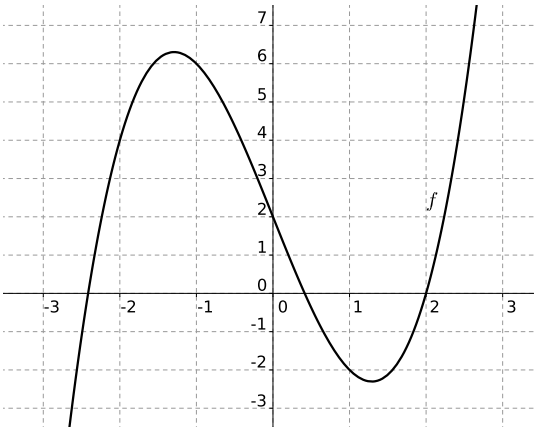
Esimerkki 49. Funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y), joilla pätee $y = x^2$:

1. http://www.wolframalpha.com

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
$-0{,}5$	0.25
0	0
0,5	0.25
1	1
2	4



Esimerkki 50. Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 2$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y), joilla pätee $y = x^3 - 5x + 2$:



Tehtäviä

Opi perusteet

119. Hahmottele funktion kuvaaja kynällä ja paperilla tai laskimen avulla. Voit myös käyttää tietokonetta.

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \frac{2}{x}$

Luku 18 Potenssifunktio

Kahden muuttujan välinen riippuvuus ei monesti ole suoraan tai kääntäen verrannollista. Potenssifunktion käyttäminen on eräs keino kuvata tällaisia riippuvuuksia.

Potenssifunktioita ovat muotoa $f(x) = ax^n$ olevat funktiot, jossa $a \neq 0$.

Eksponenttia n kutsutaan potenssifunktion *asteluvuksi* tai *asteeksi*. Potenssifunktion eksponentti voi olla mikä tahansa reaaliluku, mutta rajoitumme ensin käsittelemään tapauksia, jossa $n = 1, 2, 3 \ldots$.

Esimerkki 51. Jos neliön sivun pituus on x, neliön pinta-ala voidaan laskea funktiolla $A(x) = x^2$. Esimerkiksi jos $x = 3$ cm, saadaan neliön pinta-alaksi $A(x) = 9$ cm^2. Vastaavasti kuutiolle: jos x kuvaa kuution särmän pituutta, funktiolla $V(x) = x^3$ voidaan laskea kuution tilavuus. Sekä $A(x)$ että $V(x)$ ovat esimerkkejä potenssifunktioista.

Potenssifunktion aste vaikuttaa funktion kuvaajan muotoon:

- Jos aste on parillinen, kuvaaja on U-kirjaimen muotoinen ja funktio saa a:n merkistä riippuen joko pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia arvoja.
- Jos aste on pariton, kuvaaja muodostaa "kaksoismutkan" ja potenssifunktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Potenssifunktioiden kuvaajat - yksi parillisilla potensseilla ja toinen parittomilla (kerroin a positiivinen).

Potenssifunktion tärkeitä erikoistapauksia ovat asteluvut $n = 1$ ja $n = -1$. Kun $n = 1$, saadaan edellisessä luvussa esitelty suoraan verrannollinen riippuvuus x:n ja $f(x)$:n välillä, ja kun $n = -1$, muuttuja x ja funktion arvo $f(x)$ ovat kääntäen verrannolliset.

Potenssifunktiota voidaan laajentaa sallimalla eksponentille n myös negatiiviset arvot. Tällöin funktion muoto muuttuu merkittävästi. Funktio ei myöskään ole enää määritelty kohdassa $x = 0$, vaan funktion arvot "räjähtävät äärettömyyteen", kun y-akselia lähestytään:

Potenssifunktioiden kuvaajat - yksi potenssilla -1 ja toinen potenssilla -2.

Tehtäviä

Opi perusteet

120. Mikä on seuraavien potenssifunktioiden aste?

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 5x^5$
c) $f(x) = \frac{1}{2x}$
d) $f(x) = x^{-2}$

121. Olkoon $f(x) = x^{-3}$. Laske

a) $f(1)$
b) $f(2)$
c) $f(-\frac{1}{3})$

Hallitse kokonaisuus

122. Olkoon $f(x) = x^2$. Millä x:n arvoilla

a) $f(x) = 4$
b) $f(x) = 25$
c) $f(x) = 121$

123. Minkä kahden kokonaisluvun välissä yhtälön $x^2 = 12$ ratkaisu on?

Sekalaisia tehtäviä

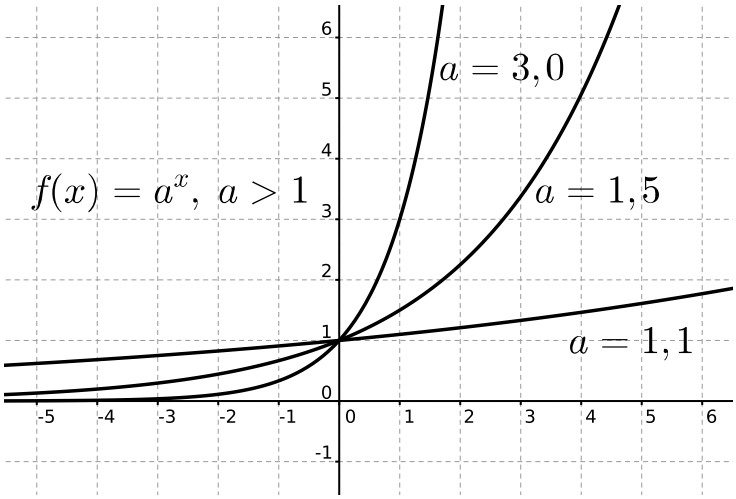
124. Kuution tilavuus särmän pituuden funktiona on $f(x) = x^3$. Jos kuution tilavuus on 64, niin mikä on särmän pituus?

Luku 19 Eksponenttifunktio

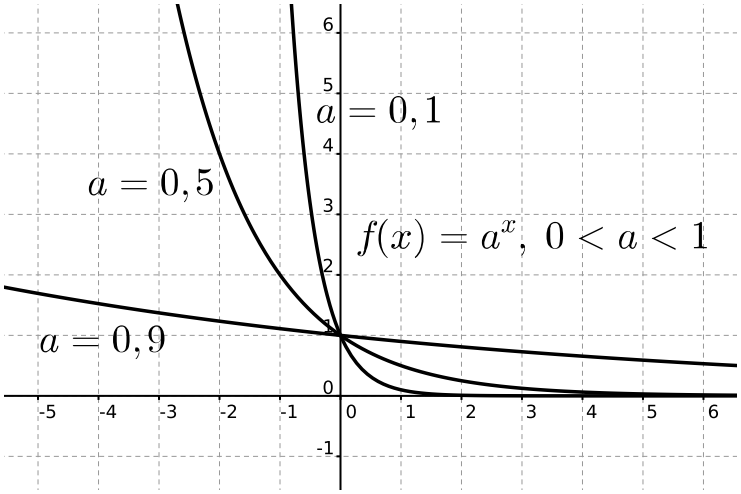
Potenssifunktiossa $f(x) = x^n$ muuttuja x on kantalukuna. Jos muuttuja x on sen sijaan eksponenttina, saadaan joukko funktioita, joita kutsutaan *eksponenttifunktioiksi*.

Eksponenttifunktiot ovat muotoa $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ olevia funktioita.

Eksponenttifunktioita on kahta tyyppiä: kasvavia ja väheneviä. Kasvavilla eksponenttifunktioilla $a > 1$, esimerkiksi



Vähenevillä eksponenttifunktioilla $0 < a < 1$, esimerkiksi



Negatiiviselle kantaluvulle ei ole määritelty yleistä reaalilukupotenssia, joten eksponenttifunktiota ei ole määritelty, kun $a < 0$.

Kun $a = 0$ tai $a = 1$, eksponenttifunktio pelkistyy vakiofunktioksi. Lisäksi 0^0:a ei ole määritelty, joten vaaditaan, että eksponenttifunktion kantaluvulle a pätee $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Esimerkki 52. Millä muuttujan x arvoilla eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ saa arvon $f(x) = 64$?

Ratkaisu. Kirjoitetaan tehtävä yhtälöksi: $2^x = 64$. Kokeilemalla huomataan, että $x = 6$ ratkaisee yhtälön.

Varmistutaan vielä siitä, että yhtälöllä ei ole muita ratkaisuja. Eksponenttifunktion kantalukuna on 2, joten eksponenttifunktio on kasvava. Funktio $f(x) = 2^x$ ei siis voi saada uudelleen arvoa 64, kun $x > 6$. Samasta syystä $f(x)$ ei voi olla 64, kun $x < 6$.

Ainoa ratkaisu yhtälölle on siis $x = 6$.

Esimerkki 53. Millä muuttujan x arvoilla eksponenttifunktio $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ saa arvon $f(x) = 1/5$?

Ratkaisu. Edellisen esimerkin tavoin kokeillaan x:n eri arvoja. Havaitaan, että kun $x = 2$, funktio saa arvon $f(x) = \frac{1}{4}$, ja kun $x = 3$, on $f(x) = \frac{1}{8}$. Ratkaisu on siis välillä $2 < x < 3$.

Ratkaisun etsimistä voidaan jatkaa kokeilemalla esimerkiksi arvoa $x = 2{,}5$. Näin päästään lähemmäksi ratkaisua, mutta yhtälön ratkaisu on irrationaalinen, joten sen desimaalikehitelmä on äärettömän pitkä ja jaksoton. Tarkkaa ratkaisua ei siis saada tällä menetelmällä.

Yleisen eksponenttiyhtälön tarkkaan ratkaisemiseen palataan myöhemmillä matematiikan kursseilla.

19.1 Eksponentiaalinen malli

Kun eksponenttifunktiota käytetään kuvaamaan jotakin reaalimaailman ilmiötä, siitä käytetään nimeä *eksponentiaalinen malli*.

Eksponentiaalinen malli on eräs yleisimmin käytetyistä matemaattisista malleista. Sillä kuvataan sellaista kasvua tai vähenemistä, jossa kullakin ajanhetkellä funktion hetkellinen muutos on suoraan verrannollinen funktion sen hetkiseen arvoon. Tämä muotoillaan täsmällisesti myöhemmillä matematiikan kursseilla.

Esimerkki 54. Soluviljelmässä olevien *Escherichia coli* -bakteerien määrää voidaan kuvata eksponentiaalisella mallilla: ajanhetkellä $t = 0$ bakteerien lukumäärä on 1, ja kullakin aika-askeleella bakteerien lukumäärä tuplaantuu. Malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = 2^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on bakteerien lukumäärä ajanhetkellä t.

Huomaa, että esimerkissä funktion $f(t)$ arvot voivat olla myös rationaalisia tai irrationaalisia, vaikka bakteerien määrä on kokonaisluku. Yleensä tätä ei pidetä ongelmallisena, vaan funktiota voidaan käsitellä, ikään kuin bakteerien määrä olisi jatkuvasti kasvava suure.

Esimerkki 55. Radioaktiivisessa hajoamisessa atomiydinten lukumäärää kuvataan eksponentiaalisella mallilla. Jos ydinten määrä ajanhetkellä $t = 0$ on $f(t) = k$, malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on atomiydinten lukumäärä ajanhetkellä t. Atomiydinten lukumäärä siis puolittuu kullakin aika-askeleella.

Tehtäviä

Opi perusteet

125. Olkoon $f(x) = 4^x$. Laske

a) $f(0)$
b) $f(3)$
c) $f(\frac{1}{2})$

126. Olkoon $f(x) = 10^x$. Millä x:n arvoilla

a) $f(x) = 1000$
b) $f(x) = \frac{1}{100}$
c) $f(x) = -1$?

Hallitse kokonaisuus

127. Minkä kahden kokonaisluvun välissä yhtälön $10^x = 500$ ratkaisu on?

128. Olkoon $f(t) = 20 \cdot 2^t$ bakteerien lukumäärä soluviljelmässä ajanhetkellä t. Millä ajanhetkellä bakteerien lukumäärä on tasan 160?

129. Miten muokkaisit edellisen tehtävän funktiota, jos bakteerien lukumääräksi halutaan 5 ajanhetkellä $t = 0$?

130. Millä ajanhetkellä atomiydinten määrä on alle 1/200 alkuperäisestä?

Sekalaisia tehtäviä

131. (YO 1877 4) Vuosikymmenen 1860-70 kuluessa lisääntyi Helsingin väkiluku puolella vuoden 1860 väkiluvulla. Jos väkiluvun lisäys tapahtuisi seuraavinakin vuosikymmeninä samassa suhteessa, paljonko väkeä Helsingissä olisi 1890, kun siellä 1860 oli 21700 asukasta?

Luku 20 Kertaus

Osa IV Kertaustehtäviä

Luku 21 Harjoituskokeita

Harjoituskoe 1

Ei laskinta.

1. Kerro jokin

(a) aina tosi yhtälö

(b) joskus tosi yhtälö (ja milloin se on tosi)

(c) aina epätosi yhtälö.

2. Laske

(a) $\sqrt{144}$ (b) $\sqrt{196}$ (c) $\sqrt[3]{64}$ (d) $\sqrt[3]{216}$.

3. Muuta murtoluvuksi

(a) 0,45 (b) 0,33 . . . (c) 0,2857142 . . . (d) 0,388 . . ..

4. Laske auki

(a) $(a+b)^2$ (b) $(a-b)^2$ (c) $(a+b)(a-b)$.

5. Mitkä seuraavista luvuista ovat alkulukuja?

(a) 11 (b) 4 (c) 29 (d) 39.

6. Ratkaise

(a) $x^2 = 1$ (b) $x^4 = x^2$.

7. Muuta seuraavat kymmenjärjestelmän luvut heksadesimaaliluvuiksi.

(a) 175 (b) 384.

8. Funktio f määritellään kaavalla $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Ilmaise $f(f(x))$ muodossa, jossa ei ole termiä $f(x)$.

Harjoituskoe 2

Ei laskinta.

1. Kerro jokin

(a) kokonaisluku, joka ei ole luonnollinen luku

(b) rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku

(c) reaaliluku, joka ei ole rationaaliluku.

2. Ratkaise

(a) $11x = 77$ (b) $8x + 174 = 50$

(c) $7x + 7 = 5x$ (d) $6x + 7 = 8x + 1$.

3. Muuta desimaaliluvuksi

(a) $\frac{3}{10}$ (b) $\frac{3}{16}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $\frac{5}{11}$.

4. Tuoreessa ananaksessa veden osuus on 80% ananaksen massasta ja A-, B- ja C-vitamiinien yhteenlaskettu osuus 0,05% massasta. Ananas kuivatetaan niin, että veden osuus laskee 8 prosenttiin ananaksen massasta. Kuinka suuri on A-, B- ja C-vitamiinien osuus kuivatun ananaksen massasta? (Luvut eivät ole faktuaalisia.)

5. Muuta seuraavat kymmenjärjestelmän luvut binääriluvuiksi.

(a) 100 (b) 128.

6. Sievennä

(a) $\frac{a^2b^2}{a}$, $a \neq 0$ (b) $3(a^2 + 1) - 2(a^2 - 1)$

(c) $ab(a + 2a)$ (d) $(a^3b^2c)^2$.

7. Olkoon $f(t) = 35 \cdot 2^t$ bakteerien lukumäärä soluviljelmässä ajanhetkellä t (sekuntia). Monenko sekunnin kuluttua bakteereita on yli 1000? Yhden sekunnin tarkkuus ylöspäin pyöristettynä riittää.

8. Määritellään kahdelle järjestetylle lukunelikolle (a, b, c, d) laskutoimitus $\odot$ seuraavasti: $(a_1, b_1, c_1, d_1) \odot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 + b_1c_2, a_1b_2 + b_1d_2, c_1a_2 + d_1c_2, c_1b_2 + d_1d_2)$. Laske $(1, 1, 1, 0) \odot (1, 1, 1, 0)$.

Luku 22 Ylioppilaskoetehtäviä

Ylioppilaskokeissa on yleensä tehtäviä tai tehtävien alakohtia, joiden ratkaiseminen on mahdollista ensimmäisen kurssin tiedoin.

(K2012/1b) Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$$

(K2012/2a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.

(S2011/1b) Ratkaise yhtälö

$$\frac{4x-1}{5} = \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{4}.$$

(K2011/1a) Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}$$

(K2011/2a) Osakkeen arvo oli 35,50 euroa. Se nousi ensin 12 %, mutta laski seuraavana päivänä 10 %. Kuinka monta prosenttia arvo nousi yhteensä näiden muutosten jälkeen?

(S2010/1a) Sievennä lauseke $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

(K2010/1b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a}+1)^2 - a - 1$.

(S2009/1c) Osoita, että $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = 5 - \sqrt{2}$.

(S2009/2b) Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+2} = 3$.

(K2009/1a) Sievennä $\frac{a^2}{3} - \left(\frac{-a}{3}\right)^2$.

(S2008/1b) Sievennä lauseke

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^2}$$

(S2009/2b) Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{5}{12}$$

(K2008/4) Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 prosentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin, kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan prosentteina verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa.

(S2007/1c) Ratkaise L yhtälöstä

$$t = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(S2007/4) Tuotteen hintaa korotettiin p prosenttia, jolloin menekki väheni. Tämän johdosta hinta päätettiin alentaa takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta prosenttia korotetusta hinnasta alennus oli?

(K2007/1c) Sievennä lauseke $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \quad (a > 0)$.

(K2007/3a) Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan altaassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihduttamisen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

(K2007/3b) Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä kasvaa korkoa korolle 1,5–kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon. Anna vastaus prosentin sadasosan tarkkuudella.

(S2006/5) Hopean ja kuparin seoksesta tehty esine painaa 150 g, ja sen tiheys on 10,1 kg/dm^3. Kuinka monta painoprosenttia esineessä on hopeaa ja kuinka monta kuparia, kun hopean tiheys on 10,5 kg/dm^3 ja kuparin 9,0 kg/dm^3?

(K2006/1a) Ratkaise x yhtälöstä $4x + 2 = 3 - 2(x + 4)$.

(K2006/1c) Sievennä lauseke

$$\frac{1}{a-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

(K2006/4) Kesämökin rakentaminen tuli 25 % arvioitua kalliimmaksi. Rakennustarvikkeet olivat 19 % ja muut kustannukset 28 % arvioitua kalliimpia. Mikä oli rakennustarvikkeiden arvioitu osuus ja mikä lopullinen osuus kokonaiskustannuksista?

(S2005/1a) Ratkaise reaalilukualueella yhtälö

$$2(x-1)+3(x+1)=-x$$

(S2005/1c) Ratkaise reaalilukualueella yhtälö $x^{16}=256$.

(K2005/1a) Sievennä lauseke

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1+x}$$

(K2005/3) Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12 % pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria olisi korotettava, jotta ne tulisivat 10 % suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti kohoavat 4 %?

(K2004/3) Perheen vuokramenot olivat 25 % tuloista. Vuokramenot nousivat 15 %. Montako prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen?

(S2003/5) Päärynämehusta ja omenamehusta tehdyn sekamehun sokeripitoisuus on 11 %. Määritä mehujen sekoitussuhde, kun päärynämehun sokeripitoisuus on 14 % ja omenamehun 7 %.

(K2003/1) Sievennä lausekkeet

(a) $\sqrt{3\frac{3}{4}}/\sqrt{1\frac{2}{3}}$

(b) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)/\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$.

(S2002/2) Vuoden 1960 jälkeen on nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka

monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut.

(S2002/4a) Olkoon $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Sievennä lauseke

$$\frac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}}$$

(K2002/3) Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille.

(S2001/1) Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$$

(S2001/3) Juna lähtee Tampereelta klo 8.06 ja saapuu Helsinkiin klo 9.58. Vastakkaiseen suuntaan kulkeva juna lähtee Helsingistä klo 8.58 ja saapuu Tampereelle klo 11.02. Matkan pituus on 187 kilometriä. Oletetaan, että junat kulkevat tasaisella nopeudella, eikä pysähdyksiin kuluvia aikoja oteta huomioon. Laske kummankin junan keskinopeus. Millä etäisyydellä Helsingistä junat kohtaavat, ja paljonko kello tällöin on?

(K2001/4) Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5 % säiliössä olevasta ilmasta. Kunka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa?

(S2000/1) Sievennä seuraavat lausekkeet:

(a) $(x^{n-1})^{n-1} \cdot (x^n)^{2-n}$

(b) $\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$

(S2000/3) Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee?

Luku 23 Pääsykoetehtäviä

23.1 Arkkitehtivalinta

(2012/1) Taloyhtiössä on 210 asukasta. Taloyhtiö perii vesimaksua 15 €/henkilö/kk. Kaupunki perii taloyhtiöltä vesimaksua kokonaiskulutuksen mukaan 3,17 €/m^3. Taloyhtiön toteutunut kokonaisvedenkulutus on asukasta kohden 155 litraa vuorokaudessa, mihin sisältyy hukkaan valuvia vuotoja yhtiötä kohden 1500m^3 vuodessa. Oletamme, että vuodessa on 365 vuorokautta.

(a) Kuinka monta litraa vettä taloyhtiössä valuu hukkaan minuutissa?

(b) Vuodot tukitaan. Montako prosenttia vesimaksua voitaisiin laskea tai tulee korottaa, jotta vesimaksu tällöin kattaisi taloyhtiön vuotuiset vesikulut?

Anna vastaukset kolmen numeron tarkkuudella.

(2010/3) Arkkitehdit M. Uoto, F. Örm ja S. Hapé ovat suunnitelleet Aalto-yliopiston aulaan kullatusta teräskuutiosta muodostuvan taideteoksen. Kultaus on ohut.

Toteutuksen aikana teoksen sijoituspaikka muuttuu, jolloin teräskuution tilavuutta kasvatetaan 19% alkuperäisestä. Loppulaskutuksessa materiaalikustannusten todetaan kasvaneen samaiset 19% alkuperäisestä budjetista.

(a) Paljonko kultaukseen käytetyn kullan määrä kasvoi toteutuksen aikana?

(b) Teräksen yksikköhinta ei toteutuksen aikana muuttunut. Miten

kullan yksikköhinta siis muuttui?

Anna vastaukset prosentteina 0,1 prosenttiyksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

23.2 Diplomi-insinöörivalinta

(2012/3) Asumistukea maksetaan 80 % vuokran määrästä, siltä osin kuin vuokra ei ylitä 252 euroa. Vuokran määrää vähennettynä asumistuella kutsutaan omavastuuksi.

(a) Minka suuruinen vuokra on, kun omavastuu on puolet vuokrasta?

(2009/1) Kokonaistuotanto jaetaan materian ja palveluiden tuotantoon. Verrataan tuotantoa tammikuussa 2008 tammikuuhun 2009. Tänä vuoden pituisen tarkastelujakson aikana materiatuotanto kasvoi 2,0 % ja palvelutuotanto laski 7,0 %.

Kuinka suuri oli materiatuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009,

(a) kun tammikuussa 2008 materia- ja palvelutuotanto olivat yhtäsuuret?

(b) kun vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0 %?

Anna kummatkin vastaukset 0,1 %-yksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

(2008/2) Yritys hankkii 5000 kg raaka-ainetta, josta on vettä 5,40 % (painoprosenttia) ja väripigmenttiä 2,60 %. Ennen käyttöä raaka-aine on laimennettava siten, että lisäyksen jälkeen sekoituksesta 6,60 % on vettä.

(a) Miten paljon hankittuun raaka-aineeseen tulee lisätä vettä, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan?

(b) Miten paljon vettä ja väripigmenttiä tulee lisätä hankittuun raaka-aineeseen, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan, ja lisäksi väripigmentin suhteellinen osuus massasta säilyy alkuperäisenä 2,60 %:na?

Anna vastaukset sadan gramman tarkkuudella.

(2007/1) Vaaleissa kaikkiaan 39 300 äänestäjästä 45 % äänestää varmasti puoluetta A ja 47 % puoluetta B. Loput ovat ns. liikkuvia äänestäjiä, jotka eivät ole vielä päättäneet kantaansa.

(a) Oletetaan, että kaikki äänioikeutetut äänestävät. Kuinka monta liikkuvien äänestäjien ääntä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön, vähintään puolet annetuista äänistä?

(b) Oletetaan, että täsmälleen kolmasosa liikkuvista äänestäjistä jättää äänestämättä. Kuinka monta prosenttia liikkuvien äänestäjien annetuista äänistä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön kaikista annetuista äänistä?

23.3 Matematiikan ja tilastotieteen valinta

(2012/1a) Ratkaise yhtälö $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$.

(2011/1) Oletetaan, että polttoaineessa E05 on etanolia 5 % ja bensiiniä 95 % ja polttoaineessa E10 etanolia 10 % ja bensiiniä 90 %. Oletetaan myös, että etanolin energiasisältö on $\frac{2}{3}$ puhtaan bensiinin energiasisällöstä. Jos tietyllä autolla 100 km kulutus on 10 litraa polttoainetta E05, paljonko kulutus on polttoainetta E10? Anna vastaus sievennettynä murto- tai sekalukuna. Jos polttoaineen E10 hinta on 1,60 €/l ja polttoaineen E05 hinta on 1,65 €/l, kumpaa on edullisempaa käyttää?

(2008/1) Matkailuauton nopeus on 80 km/h, mutta kolmasosalla matkasta Jyvaskylästä Heinolaan se laskee tietöiden takia 40 kilometriin tunnissa. Kuinka paljon tietyöt alentavat matkailuauton keskinopeutta valillä Jyväskylä-Heinola?

23.4 Tekniikan ja liikenteen alan AMK-valinta

(K2012/3) Erään tuotteen valmistuskustannuksista raaka-aineiden osuus on 65 % ja palkkojen osuus on 35 %.

(a) Jos työntekijät saavat 5 % palkankorotuksen, niin kuinka monta prosenttia tuotteen valmistuskustannukset kasvavat?

(b) Jos toisaalta valmistuskustannukset halutaan pitää ennallaan palkankorotuksen jälkeen, niin montako prosenttia raaka-ainekustannusten pitää pienentyä?

(K2012/4) Esitä luku $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$ yhtenä murtolukuna (siis muodossa $\frac{m}{n}$ [missä m ja n ovat kokonaislukuja, toim. lis.]).

(S2011/2) Olkoon $a = 132$ ja $b = 112$. Kuinka monta prosenttia

(a) luku a on suurempi kuin luku b

(b) luku b on pienempi kuin luku a

(c) luku b on luvusta a?

(K2011/1) Laske lukujen $\frac{1}{3}$ ja $-\frac{7}{3}$

(a) summan vastaluku

(b) summan käänteisluku

(c) käänteislukujen summa.

(K2011/2) Yksi kilogramma etanolia tuottaa palaessaan energiaa 26,8 MJ ja vastaavasti yksi kilogramma puhdasta bensiiniä tuottaa palaessaan energiaa 42,6 MJ. Kuinka monta prosenttia enemmän energiaa puhdas bensiini tuottaa palaessaan kuin 95 E10 -bensiini, joka sisältää 10 % etanolia? Ilmoita vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

23.5 Kauppatieteiden valintakoe

Kauppatieteiden valintakokeen tehtävät ovat monivalintoja. Kussakin tehtävässä on täsmälleen yksi oikea vastausvaihtoehto. Kokeessa saa käyttää

ainoastaan ns. nelilaskinta, jolla voi laskea vain yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja sekä neliöjuuren. Seuraavia tehtäviä ratkoessasi sinun kannattaa miettiä, miten toimisit, jos käytössäsi olisi vain nelilaskin.

(2002/38) Mikä on lukujen $a = 2^{1/2}$, $b = 3^{1/3}$ ja $c = 5^{1/5}$ suuruusjärjestys?

(a) $a > b > c$

(b) $a > c > b$

(c) $b > a > c$

(d) $c > a > b$

(2008/43) TietoEnatorin liikevaihto vuonna 2007 oli 1 772,4 MEUR (miljoona Euroa). Mikä alla olevista vaihtoehdoista on lähimpänä vuoden 1999 liikevaihtoa, kun liikevaihdon keskimääräinen vuotuinen muutosprosentti kahdella desimaalilla on ollut 3,96%? Keskimääräinen muutosprosentti on luku, joka ilmaisee kuinka paljon liikevaihto olisi vuosittain prosentuaalisesti kasvanut, jos prosentuaalinen kasvu olisi ollut vakio.

(a) 1 299,1 MEUR

(b) 1 346,0 MEUR

(c) 1 704,9 MEUR

(d) 1 249,6 MEUR

(2004/40) Piensijoittajan rahavarat r vuoden alussa ovat 1 000 €, ja ne kasvavat korkoa vuotuisen korkotekijän $R = 1{,}04$ mukaisesti. Vuoden lopussa korko lisätään pääomaan, ja seuraavana vuotena vuotuinen korkotekijä on $R = 1{,}10$. Korkotuotto kahdelta vuodelta on (lähimpään kokonaislukuun pyöristettynä)

(a) 145 €.

(b) 140 €.

(c) 100 €.

(d) 144 €.

(2003/33) Yhtä tuotetta valmistavan monopoliyrityksen kuukauden tarjontamäärän ollessa q (yks/kuukausi) on tuotteen hinta p (euroa/yks) annettu hintafunktiolla $p = 100 - q$. Kun kyseessä on monopoli, yritys määrää markkinahinnan p valitsemalla tuotantomäärän q, jolloin hinta määräytyy hintafunktion mukaisesti. Yrityksen tuotantokustannukset

$c(q)$ (euroa/kuukausi) tuotantomäärän q funktiona ovat
$c(q) = 100 + 80q$, kun $q \leq 15$, ja
$c(q) = 700 + 40q$, kun $q \geq 15$.
Yrityksen voitto $pq - c(q)$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun

(a) $q = 10$.
(b) $q = 15$.
(c) $q = 30$.
(d) $q = 60$.

(2000/33) Erään tuotteen kysyntämäärä d (yksikköä) riippuu yksikköhinnasta p (mk/yksikkö) funktion $d = 5000p^{-1,5}$ mukaisesti. Tuotteen yksikkökustannukset ovat vakio 15 mk/yksikkö. Suurin nettotuotto saadaan tällöin hinnalla

(a) 40 mk.
(b) 45 mk.
(c) 50 mk.
(d) 55 mk.

Liitteet

Liite A Lähtötasotesti

Lähtötasotesti kurssille MAA1

Muokataan tehtäväympäristöä niin, etteivät nämä jatka vanhaa tehtävänumerointia.

132. Laske. Merkitse välivaiheet näkyviin.

1. $2 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5$
2. $(2+1)^2 + \frac{4-2}{2}$

133. Laske. Merkitse välivaiheet näkyviin.

1. $4 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$
2. $\frac{2}{5} : \frac{3}{2}$

134.
1. Kuinka paljon on 5 % luvusta 40?
2. Kuinka monta prosenttia 2 on luvusta 4?

135. Sievennä.

1. $x + 2x + x^2$
2. $2(4x + 1)$

136.
1. Matka ja aika ovat suoraan verrannollisia. Jos matka kaksinkertaistuu, niin miten käy ajalle?
2. Sievennä $-3x + 4x^2 - 2x + x^2$.

137. Ratkaise yhtälöt.

1. $2x + 5 = -1$
2. $x^2 = 9$

138. Funktiot on määritelty seuraavasti: $f(x) = x^2 + 3x$ ja $g(x) = 2x - 8$.

1. Laske $f(-2)$.
2. Millä x:n arvolla $g(x) = 0$?

Liite B Yksiköt ja vastaustarkkuus

Etuliitteet

Tavallisimmat kerrannaisyksiköiden etuliitteet:

Nimi	Kerroin	Tunnus	Nimi	Kerroin	Tunnus
deka	10^1	da	desi	10^{-1}	d
hehto	10^2	h	sentti	10^{-2}	c
kilo	10^3	k	milli	10^{-3}	m
mega	10^6	M	mikro	10^{-6}	μ
giga	10^9	G	nano	10^{-9}	n
tera	10^{12}	T	piko	10^{-12}	p

Tietotekniikassa datan määrää mitataan tavuina, mutta siellä yksi kilotavu (kt) ei tarkoita tasan 1000 tavua, vaan 1024 tavua (2^{10}). Vastaavasti yksi megatavu on 1024 kt (eli $1048576 = 2^{20}$ tavua), yksi gigatavu 1024 Mt jne.

Yksikkömuunnokset

Yksi tunti on 60 minuuttia. Yksi minuutti on 60 sekuntia.

- $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- $1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$
- $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{s}$

taulukko amerikkalaisista yksiköistä

Esimerkki 56. Kuinka monta minuuttia on 1,25 h? $1{,}25\mathrm{h} = 1{,}25 \cdot 60\mathrm{min} = 75\mathrm{min}$. 1,35 h on siis 75 minuuttia. Huomaa, että voit laskuissasi esittää desimaaliluvun 1,25 yhdistettynä lukuna $1\frac{25}{100}$ eli $1\frac{1}{4}$, mikä saattaa helpottaa laskemista.

Esimerkki 57.

139. Muuta *järkevimpään* yksikköön.

a) 0,3 km + 200 m b) 0,04 m + 10 mm

c) 0,4 km + 7000 m + 1000000 mm

d) 0,2 cm + 4 cm

Esimerkki 58.

esimerkki cm muuttamisesta tuumaksi ja toisinpäin

havainnollistava kuva, jossa on rinnastettu suoralla sentit ja tuumat

140. Muuta minuuteiksi.

a) 1 h 17 min b) 2 h 45 min c) 1,5 h d) 1,75 h

141. Muuta sekunneiksi.

a) 1 h 42 min b) 3 h 32 min c) 1,25 h d) 4,5 h

142. Muuta tunneiksi ja minuuteiksi.

a) 125 min b) 667 min c) 120 min d) 194 min

143. Esitä luku ilman kymmenpotenssia.
a) $3{,}2 \cdot 10^4$ b) $-7{,}03 \cdot 10^{-5}$ c) $10{,}005 \cdot 10^{-2}$

TEHTÄVÄ: muuta sekunteita tunneiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi

144. Esitä luku ilman etuliitettä.
a) 0,5 dl b) 233 mm c) 33 cm d) 16 kg e) 2 MJ f) 4 kt g) 0,125 Mt

TEHTÄVÄ: muuta minuuteista tunneiksi desimaalimuodossa, esim 1,25h

145. Laske oma pituutesi ja painosi tuumissa ja paunoissa.

146. Muuta seuraavat pituudet SI-muotoon (1 tuuma = 2,54 cm, 1 jaardi = 0,914 m, 1 jalka = 0,305 m, 1 maili = 1,609 km).
a) 5 tuumaa senttimetreiksi
b) 0,3 tuumaa millimetreiksi
c) 79 jaardia metreiksi
d) 80 mailia kilometreiksi
e) 5 jalkaa ja 7 tuumaa senttimetreiksi
f) 330 jalkaa kilometreiksi

TEHTÄVÄ: sanallinen tehtävä, jossa pitää laskea esim. km ja m yhteen

147. Jasper-Korianteri ja Kotivalo vertailivat keppejään. Jasper-Korianteri mittasi oman keppinsä 5,9 tuumaa pitkäksi ja Kotivalo omansa 14,8 cm pitkäksi. Kummalla on pidempi keppi?

TEHTÄVÄ: sanallinen tehtävä, jossa pitää vertailla minuuttiaikaa ja tuntiaikaa

Pyöristäminen

Mikäli urheiluliikkeessä lumilaudan pituudeksi ilmoitetaan tarkan mittauksen jälkeen 167,9337 cm, tämä tuskin on asiakaalle kovin hyödyllistä tietoa. Epätarkempi arvo 168 cm antaa kaiken olleellisen informaation ja on mukavampi lukea.

Pyöristämisen ajatus on korvata luku sitä lähellä olevalla luvulla, jonka esitysmuoto on lyhyempi. Voidaan pyöristää esimerkiksi tasakymmenien, kokonaisten tai vaikkapa tuhannesosien tarkkuuteen.

Pyöristys tehdään aina lähimpään oikeaa tarkkutta olevaan lukuun. Siis esimerkiksi kokonaisluvuksi pyöristettäessä $2{,}8 \approx 3$, koska 3 on lähin kokonaisluku. Lisäksi on sovittu, että puolikkaat (kuten 2,5) pyöristetään ylöspäin.

Se, pyöristetäänkö ylös vai alaspäin (eli suurempaan vai pienempään lukuun) riippuu siis haluttua tarkkuutta seuraavasta numerosta: pienet 0, 1, 2, 3, 4 pyöristetään alaspäin, suuret 5, 6, 7, 8, 9 ylöspäin.

Esimerkki 59. Pyöristetään luku 15,0768 sadasosien tarkkuuteen. Katkaistaan luku sadasosien jälkeen ja katsotaan seuraavaa desimaalia:
$15{,}0768 = 15{,}07|68 \approx 15{,}08$.
Pyöristettiin ylöpäin, koska seuraava desimaali oli 6.

Merkitsevät numerot

Mikä on tarkin mittaus, 23 cm, 230 mm vai 0,00023 km? Kaikki kolme tarkoittavat täsmälleen samaa, joten niitä tulisi pitää yhtä tarkkoina. Luvun esityksessä esiintyvät kokoluokkaa ilmaisevat nollat eivät ole *merkitseviä numeroita*, vain 2 ja 3 ovat.

Merkitseviä numeroita ovat kaikki luvussa esiintyvät numerot, paitsi nollat kokonaislukujen lopussa ja desimaalilukujen alussa.

Jos esimerkiksi pöydän paksuudeksi on mitattu millin tuhannesosien tarkkuudella 2 cm, voidaan pituus ilmoittaa muodossa 2,0000 cm, jolloin tarkkuus tulee näkyviin.

Kokonaislukujen kohdalla on toisinaan epäselvyyttä merkitsevien numeroiden määrässä. Kasvimaalla asuvaa 100 citykania on tuskin laskettu ihan tarkasti, mutta 100 m juoksuradan todellinen pituus ei varmasti ole todellisuudessa esimerkiksi 113 m.

Luku	Merkitsevät numerot
123	3
12 000	2 (tai enemmän)
12,34	4
0,00123	3

Vastausten pyöristäminen käytännön laskuissa

Pääsääntö on, että vastaukset pyöristetään aina epätarkimman lähtöarvon mukaan. Yhteen- ja vähennyslaskuissa epätarkkuutta mitataan desimaalien lukumäärällä.

Jos esimerkiksi 175 cm pituisen ihmisen nousee seisomaan 2,15 cm korkuisen laudan päälle, olisi varsin optimistista ilmoittaa kokonaiskorkeudeksi 177,15 cm. Kyseisen ihmisen pituus kun todellisuudessa on mitä tahansa arvojen 174,5 cm ja 175,5 cm väliltä. Lasketaan siis
175 cm + 2,15 cm = 177,15 cm $\approx$ 177 cm. Epätarkempi lähtöarvo oli mitattu senttien tarkkuudella, joten pyöristettiin tasasentteihin.

Kerto-ja jakolaskussa tarkkuutta arvioidaan merkitsevien numeroiden mukaan. Jos esimerkiksi pitkän pöydän pituus karkeasti mitattuna 5,9 m ja pöydän leveydeksi saadaan tarkalla mittauksella 1,7861 m, ei ole perusteltua olettaa pöydän pinta-alan olevan todella

$$5{,}9\,\mathrm{m} \cdot 1{,}7861\,\mathrm{m} = 10{,}53799\,\mathrm{m}^2.$$

Pyöristys tehdään epätarkimman lähtöarvon mukaisesti kahteen merkitsevään numeroon:

$$5{,}9\,\mathrm{m} \cdot 1{,}7861\,\mathrm{m} = 10{,}53799\,\mathrm{m}^2 \approx 11\mathrm{m}^2.$$

148. Pyöristä kymmenen tarkkuudella.
a) 8 b) 23 c) 65 d) 9001 e) 1 f) -6 g) -12
h) 99994

149. Pyöristä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

a) 1,0003 b) 3,69 c) 152,8 d) 7062,4 e) −2,05 f) 0,00546810 g) −1337 h) 0,0000501

150. Montako merkitsevää numeroa on seuraavissa luvuissa?

a) 5 b) 12,0 c) 9000 d) 666 e) 9000,000 f) 0,0 g) −1 h) −0,00024

Liite C Laskusääntöjen todistuksia

Tähän tulee potenssien (ja ehkä muidenkin?) laskusääntöjen todistuksia, kunhan joku laatii ne.

Murtolausekkeiden sieventäminen

Jos murtoluvun osoittajassa tai nimittäjässä on summa, jonka osilla on yhteinen tekijä, sen voi ottaa *yhteiseksi tekijäksi* sulkujen eteen. Jos osoittajassa ja nimittäjässä on sen jälkeen sama kerroin, sen voi jakaa pois molemmista eli *supistaa* pois.

$$\frac{ac+bc}{c} = \frac{\cancel{c}(a+b)}{\cancel{c}} = a+b \tag{C.1}$$

Joskus murtolauseke sieventyy, jos sen esittääkin kahden murtoluvun summana.

$$\frac{ca+b}{c} = \frac{ca}{c} + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} \tag{C.2}$$

Kun jakaa kolme erikokoista nallekarkkipussia (a, b ja c) tasan kolmen ihmisen kesken, on sama, laittaako kaikki ensin samaan kulhoon ja jakaa ne sitten ($\frac{a+b+c}{3}$) vai jakaako jokaisen pussin erikseen ($\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}$).

Jos taas samat kolme henkilöä jakavat keskenään pussin tikkareita (6 kpl) ja yhden pussin nallekarkkeja (n kpl), niin saadaan seuraavanlainen lasku: $\frac{6 \text{ tikkaria}+n \text{ nallekarkkia}}{3} = \frac{6 \text{ tikkaria}}{3} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3} = \frac{\cancel{3}\cdot 2 \text{ tikkaria}}{\cancel{3}} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3} = 2 \text{ tikkaria} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3}$. Toisin sanoen, kukin saa kaksi tikkaria ja kuinka paljon ikinä onkaan kolmasosa kaikista nallekarkeista.

Samantyyppiset asiat voidaan laskea yhteen tai *ryhmitellä*.

$$ax^2 + bx + cx^2 + dy + ex = (a+c)x^2 + (b+e)x + dy \qquad \text{(C.3)}$$

Esimerkki 60. $\frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{1}{6} + \frac{9}{6} = \frac{10}{6} = \frac{\cancel{2}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{5}{3}$

151. Sievennä

a) $2x^2 + 3x + 5x^2$

b) $x^2 + 3x^3 + x^2 + x^3 + 2x^2$

c) $ax^2 + bx + cx$

d) $ax^3 + bx + cy^3 + dx + ey^3 + fx^3$

152. Sievennä

a) $\frac{2x^3}{x}$

b) $\frac{3x^3y^2}{xy}$

c) $\frac{x^2yz}{xy^2}$

d) $\frac{6xy^3z^2}{2xz}$

153. Sievennä

a) $\frac{2x^5+3x^3}{x^2}$

b) $\frac{6x^2+8y}{2x^2}$

c) $\frac{3x-2x^2y^3}{xy}$

d) $\frac{2x^2+3xy^2z-4xz}{2xy^2z}$

154. Sievennä.

a) $\frac{1-x}{3} + \frac{x-2}{6}$

b) $\frac{5x-1}{3} - \frac{2x+5}{2}$

c) $\frac{4x^2+3x}{x} + \frac{5x^3y-2x^2y}{x^2y}$

d) $\frac{7x+5y}{y} - \frac{3x-2y}{x}$

155. Sievennä.

a) $\frac{x}{6y} \cdot \frac{3y}{2}$

b) $x \cdot \frac{x+y}{xy}$

156. Sievennä:

$(2ab + 4b^2 - 8b^3c) : (a + 2b - 4b^2c)$

Liite D Syventävää sisältöä: logiikka ja joukko-oppi

Liite E Syventävää sisältöä: reaalilukujen aksioomat

Reaaliluvut ovat kunta, eräs algebrallinen rakenne. Myös esimerkiksi rationaaliluvut ja seuraavassa liitteessä esiteltävät kompleksiluvut muodostavat kunnan. Sen sijaan luonnolliset luvut ja kokonaisluvut eivät ole kuntia.

Reaalilukujen aksiomaattinen määritelmä muodostuu kolmesta osasta:

Kunta-aksioomat

K1. $\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x + (y + z) = (x + y) + z$	| summan liitäntälaki
K2. $\exists 0 \in \mathbb{R}:$	$x + 0 = x$	| summan neutraalialkio
K3. $\forall x \in \mathbb{R}$	$\exists(-x) \in \mathbb{R}: \quad x + (-x) = 0$	| vasta-alkio
K4. $\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x + y = y + x$	| summan vaihdantalaki
K5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	| osittelulaki
K6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	| tulon liitäntälaki
K7. $\exists 1 \in \mathbb{R}:$	$1 \cdot x = x$	| tulon neutraalialkio
K8. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad x \cdot x^{-1} = 1$	| tulon käänteisalkio
K9. $\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x \cdot y = y \cdot x$	| tulon vaihdantalaki

Järjestysaksioomat

J1. $\forall x, y \in \mathbb{R}:$	täsmälleen yksi seuraavista:
	$(x > y)$, $(x = y)$, $(x < y)$
J2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$
J3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x < y) \Leftrightarrow (x + z < y + z)$
J4. $\forall x, y \in]0,\infty[:$	$x \cdot y \in]0,\infty[$

Täydellisyysaksiooma

T1. Jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on pienin yläraja.

157. Todista aksioomista lähtien:

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \cdot x = -x$

(3) $\forall x, y \in]-\infty,0[: x \cdot y \in]0,\infty[$

158. Kylpyhuoneessa on kolme hanaa. Hana A täyttää kylpyammeen 60 minuutissa, hana B 30 minuutissa ja hana C 15 minuutissa. Kuinka kauan

kylpyammeen täyttymisessä kestää, jos kaikki hanat ovat yhtäaikaa auki?

Liite F Ratkaisut

1 a) $-10 + (-2) = -12$

b) $-20 - (-3) = -17$

c) $17 - 5 = 12$

d) $5 + 6 = 11$

e) $\frac{-30000}{3} = 10000$

2 a) 2

b) -3

c) -4

d) -16

e) 2

f) 2

g) 2

h) -60

3 a) 3

b) 0

c) 3

d) 4

e) 30

f) -11

g) 5

4 a) Ei ole jaollinen luvulla 4

b) On jaollinen luvulla 4, $12 = 4 \cdot 3$

c) Ei ole jaollinen luvulla 4

d) Ei ole jaollinen luvulla 4

e) On jaollinen luvulla 4, $-20 = 4 \cdot (-5)$

f) On jaollinen luvulla 4, $0 = 4 \cdot 0$

5 a) Ei ole alkuluku, esim. $6 = 2 \cdot 3$

b) On alkuluku

c) On alkuluku

d) Ei ole alkuluku, esim. $27 = 3 \cdot (-9)$

e) Ei ole alkuluku, esim. $-11 = (-1) \cdot 11$ Huom. alkuluvut ovat suurempia kuin yksi (ja siis positiivisia)

f) Ei ole alkuluku, esim. $0 = 6 \cdot 0$

6 a) $12 = 2^2 \cdot 3$

b) $15 = 3 \cdot 5$

c) $28 = 2^2 \cdot 7$

d) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

e) $64 = 2^6$

f) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

g) $100 = 2^2 \cdot 5^2$

7 a) $\frac{8}{11}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{12}$

8 a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{2}{3}$

9 a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{19}{30}$

10 a) $1\frac{1}{21}$ b) $-\frac{16}{39}$ c) $\frac{7}{32}$

11 a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{29}{30}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) $-6\frac{1}{4}$

12 a) $\frac{2}{11}$ b) $5\frac{2}{3}$

13 a) $-\frac{2}{5}$ b) $-\frac{1}{7}$ c) -7

14 a) 1 b) $-\frac{1}{7}$

15 $1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{60}{60} - \frac{20}{60} - \frac{15}{60} - \frac{12}{60} = \frac{60}{60} - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$

16 Luvut ovat sievennettynä peräkkäisten Fibonaccin lukujen osamääriä:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8} \ldots$$

17 Muut saivat piirakasta kuudesosan.

18 a) 50 euroa

b) 50 euroa

c) 37,50 euroa

19 $\frac{10}{2} = 5$.

20 $40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40 \cdot \frac{4}{10} = 16$.

21 Toisena päivänä aamulla kakkua on jäljellä puolet, kolmantena päivänä aamulla $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, neljäntenä päivänä $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$, jne. Siis seitsemän päivän jälkeen kakkua on jäljellä $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\right) = \frac{1}{128}$.

22 $5\frac{1}{7}$

23 a) -8 b) 1

24 a) a^3 b) a^3b^4 c) a^4b^3

25 a) 64 b) 64 c) 64 d) 64

26 a) a^{10} b) a^6 c) a^{20} d) a^5

27 a) 2 b) 4 c) 4 d) 8 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$

28 a) a^3 b) $4a^2$ c) $-8a^3b^3c^3$ d) $91a^4$

29 a) a^8b^2 b) a^2b^6 c) $a^{15}b^{12}$ d) $10^8 = 100\ 000\ 000$

30 a) a^2 b) $-a^2b^3$ c) $-a^4$

31 a) a^2b^3 b) 1 c) a^{17} d) a^8b^{10}

32 a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{b^3}{a^3}$ c) a^8b^8 d) $\frac{a^8}{b^8}$

33 a) $2a^7$ b) b^9 c) $-\frac{1}{3}a = -\frac{a}{3}$ d) $\frac{10\ 000}{b^6}$

34 a) ${}^42 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\ 536$ b) ${}^35 = 5^{5^5} = 5^{25} \approx 2{,}98 \cdot 10^{17}$.
c) Kokeilemalla $x = 3$.

35 a) a^5 b) a^5 c) a^3 d) a^4 e) a^6

36 a) 1 ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty) b) 1 c) a d) a^2
e) a

37 a) a^4 b) a^4 c) a^5b d) a^2b^2

38 a) a^2 b) $-a^2b$ c) a^4

39 a) a^5 b) a^2b c) $-a^4$

40 a) 0 b) 3 c) 32 d) 4 e) 1

41 a) a^3 b) a^{12} c) a^8 d) a^3 e) 1

42 a) 16 b) 64 c) $16a^8$ d) $27b^4$

43 a) a^6b^4 b) a^9b^{12} c) $a^{20}b^{10}$ d) $8a^3b^7$

44 a) a b) a^2 c) a^2 d) a^3 e) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ f) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

45 a) ab b) b c) 1 d) 1 e) $-\frac{a}{b}$

46 a) $\frac{1}{a^3}$ b) $\frac{1}{a^2}$ c) a^3 d) $\frac{}{a^4b^3}$ e) a^8

47 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{27}$ c) $\frac{a^4}{b^4}$ d) $\frac{a^4}{b^6}$ e) $\frac{a^2}{b^4}$

48 a) 8
b) a^4
c) a^5
d) 0

49 a) a^7
b) a^2
c) a^6
d) 1

50 a) $-a^6$
b) 1
c) $27a^3$
d) $a^{15}b^9$

51 a) $\frac{1}{4}$
b) a^2
c) $\frac{1}{9}$
d) $\left(\frac{1}{a^{12}b^{16}}\right)$ tai $a^{-12}b^{-16}$

53 a) $\frac{43532}{1000}$
b) $\frac{5031}{1000}$
c) $\frac{23}{100}$

d) $\frac{3002}{1000}$

e) $\frac{101}{1000}$

54 a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{49}{200}$

c) $\frac{1}{250}$

d) $\frac{251}{250\ 000}$

55 a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ c) $\frac{205\ 426}{99\ 900} = \frac{102\ 713}{49\ 950}$

56 a)

57 a) $5{,}0_{10}$

b) $1{,}15625_{10}$

c) 37.8125_{10}

58 a) $111{,}0_2$

b) $10{,}1_2$

c) $1011{,}0011_2$

59 a) 17,89 b) 3,87 c) 8,43

60 $\sqrt{8100} = \sqrt{81}\sqrt{100} = 9 \cdot 10$.

61 $a = \sqrt{\sqrt{83521}}$.

62 Suorakaide muodostuu kahdesta vierekkäisestä neliöstä, joiden pinta-ala on 5. Tämän neliön sivun pituus on $\sqrt{5}$. Siis suorakaiteen korkeus on $\sqrt{5}$ ja leveys $2\sqrt{5}$.

63 $\frac{4}{3}x^2 = 100$ joten $x = \sqrt{\frac{300}{4}}$. Hypotenuusa: $\sqrt{x^2 + (\frac{4}{3}x)^2} = \sqrt{\frac{300}{4} + \frac{16}{9} \cdot \frac{300}{4}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{300}{4}} \approx 14{,}4$.

64 a) 8 b) Ei määritelty c) 4 d) -4

65 a) 3 b) Ei määritelty c) 2 d) -2

66 $10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1\ 000, 10^4 = 10\ 000$. Luvussa 10^n on n kappaletta nollia. Niinpä $\sqrt[6]{1\ 000\ 000} = 10$ ja $\sqrt[10]{10\ 000\ 000\ 000} = 10$.

67 a) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a, koska kaikkien lukujen neliöt ovat vähintään nolla. Vastaus on aina ei-negatiivinen.

b) Juuri on määritelty vain luvulla $a = 0$. Muilla a:n arvoilla $-a^2$ on negatiivinen, jolloin parillinen juuri ei ole määritelty. Ainoa vastaus, joka voidaan saada, on siis $\sqrt[4]{0} = 0$.

c) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a, koska $(-a)^2$ on aina vähintään nolla. Vastaus on aina ei-negatiivinen.

d) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a, koska kaikkien lukujen neliöt ovat vähintään nolla. Vastaus on aina ei-positiivinen, koska $\sqrt[4]{a^2}$ on aina ei-negatiivinen.

68 a) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a. Vastaus on aina ei-negatiivinen.

b) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a. Vastaus voi olla mikä tahansa luku.

c) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a. Vastaus on aina ei-positiivinen.

d) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a. Vastaus on aina ei-positiivinen.

69 $3 + \sqrt{3}x$

70 $(3 - 2\sqrt{2}) : (3 + 2\sqrt{2})$

71 a) $a^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{\frac{1}{6}}$ c) $a^{\frac{1}{n}}$

72 a) b^2 b) $b^{\frac{1}{2}}$ c) $b^{\frac{2}{5}}$ d) $\frac{1}{4}$

73 a) $(\sqrt[5]{x})$ b) $(\sqrt[3]{x})^4$ b) x^2 d) $(\sqrt[4]{x})$

74 a) 3 b) 2 b) 8 d) 27

75 a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$ b) $\sqrt{x^3}$ d) $\sqrt[7]{x^8}$

76 a) $2\sqrt{2}$ b) 32 b) $(\sqrt[3]{16})^2$ d) $5(\sqrt[3]{5})^2$

77 a) $k^{\frac{1}{4}}$ b) $k^{\frac{1}{12}}$ b) $m^{\frac{3}{4}}$ d) $m^{\frac{8}{35}}$

78 a) $\alpha^{\frac{2}{9}}$ b) $q^{\frac{1}{2}}$ c) $\frac{27}{4}$

79 a) Kun $x = 1{,}3$, tornien arvot vakiintuvat lukuun $1{,}4709\ldots$; kun $x = 1{,}7$, tornien arvot kasvavat mielivaltaisen suuriksi; kun $x = 0{,}05$, tornien arvot vuorottelevat lukujen $0{,}136\ldots$ ja $0{,}664\ldots$ välillä.

b) Arvot vakiintuvat, kun $0{,}00659\ldots \leq x \leq 1{,}444667\ldots$; tämän voi esittää muodossa $\frac{1}{e^e} \leq x \leq \sqrt[e]{e}$, missä e on luku nimeltään Neperin luku. Desimaalilukuna $e = 2{,}718281828459\ldots$.

80 $x = \sqrt{2}$

81 a) irrationaaliluku b) rationaaliluku (jakso on 151) c) irrationaaliluku

82 a) -2 b) 0 c) Sellaista ei ole. Jos nimittäin $a > -3$, niin keskiarvo $\frac{-3+a}{2}$ on vielä lähempänä lukua -3.

83 Vihjeet: a) keskiarvo b) $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Käytä painotettua keskiarvoa. c) pyöristäminen d) hyödynnä b-kohtaa e) keskiarvot

84 Jos $b = 0$, yhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla. Jos $b \neq 0$, yhtälö ei toteudu millään x:n arvolla. Periaatteessa kyseessä ei kuitenkaan enää ole ensimmäisen asteen yhtälö, mikäli $a = 0$

85 a) $x = 1$
b) $x = 4$
c) $x = 35/7$
d) $x = -2$
e) $x = 10/3$
f) $x = 1/5$
g) $x = 10$
h) $x = -1/8$

86 a) $m = \frac{F}{a}$
b) $F = pA$
c) $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
d) $h = \frac{V}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

87 a) 350 puheminuuttia/tekstiviestiä
b) 100 tekstiviestiä

88 0,75 mm/tunti

89 Vastaus:

1. Eivät ole.
2. Suoraan verrannolliset.
3. Kääntäen verrannolliset.
4. Suoraan verrannolliset.

90 1. $x = \frac{1}{3}$
2. $y = \frac{1}{4}$

3. $x = \frac{7}{2}$
4. $x = \frac{3}{7}$

91 1. $\frac{x}{m} = c$
2. $xt = c$
3. $\frac{Fr^2}{m_1+m_2} = c$

92 Viiden minuutin tarkkuudella 20 min.

93 Vastaus: 30 min

94 Vastaus: 642 minuuttia eli 10 h 42 min.

95 13 % sadasta eurosta on 13 euroa, ei 11,50 euroa, niin kuin kuitissa todetaan.

96 Vastaus: 168,75 euroa

97 1644,63 euroa

98 Vastaus: Kirjan veroton hinta on 24,77 €.

99 Vastaus: 2 tonnia

100 Vastaus: Kannatus nousi 15 prosenttiyksikköä. Prosentteina mitattuna kannatus nousi 366 %.

101 Vastaus: 50 %.

102 Vastaus: 50 %.

103 Vastaus: 22 %.

104 1. 95,4 %
2. 4,62 %
3. 4,85 %

105 18,7 %

106 Vähentyvät 1 prosentilla.

107 Vastaus: 16 %

108 Vastaus: 10 s

109 25 %

110 200 %

111 5,6 %

112 a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = -1$ d) $x = \sqrt{3}$ e) $x = -5$

113 a) $x = \sqrt{5}$ b) $x = 1$ c) $x = -1$ d) $x = 2$ e) Ei ratkaisua.

117 a) 6
b) 4
c) $2\sqrt{2} + 8$
d) $3\sqrt[3]{2} + 12$
e) ei määritelty
f) $\frac{-9}{2}$

118 a) $x = 1$
b) kaikilla $x \in \mathbb{R}$
c) ei ratkaisuja
d) $x = 0$
e) $x = -1$

120 1. 1
2. 5
3. -1
4. -2

121 1. 1
2. $\frac{1}{8}$
3. -27

122 1. 2
2. 5
3. 11

123 Ratkaisu on lukujen 3 ja 4 välissä.

124 Särmän pituus on 4.

125 a) 1
b) 64
c) 2

126 a) 3

b) 6

c) Ei ratkaisua.

127 Ratkaisu on lukujen 2 ja 3 välissä.

128 Ajanhetkellä $t = 3$.

129 $f(t) = 5 \cdot 2^t$

130 Ajanhetkellä $t = 8$.

131 73200 (pyöristämättä 73237,5)

132

$2 + 6 - 5 = 3$

$3^2 + \frac{2}{2} = 9 + 1 = 10$

133

$\frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} =$

134

2

50 %

135

$2x + x^2$

$8x + 2$

136

Aika kaksinkertaistuu

$5x^2 - 5x$

137

$x = -3$

$x = -3$ tai $x = 3$

138

$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) = -2$

$x = 4$

139 a) 500 m b) 5 cm c) 8,4 km d) 4,2 cm

140 a) 77 min b) 165 min c) 90 min d) 105 min

141 a) 6120 s b) 12720 s c) 4500 s d) 16200 s

142 a) 2 h 5 min b) 11 h 7 min c) 2 h d) 3 h 14 min

143 a) 32000 b) −0,0000703 c) 0,10005

144 a) 0,05 l b) 0,233 m c) 0,33 m d) 16000 g e) 2000000 J f) 4096 tavua g) 131072 tavua

146 a) 12,7 cm b) 7,62 mm c) 72,206 m d) 128,72 km e) 170,28 cm f) 100,65 m

147 Jasper-Korianterilla, sillä 5,9 tuumaa = 14,986 cm.

148 a) 10 b) 20 c) 70 d) 9000 e) 0 f) −10 g) −10 h) 99990

149 a) 1,0 b) 3,7 c) 150 d) 7000 e) −2,0 f) 0,0055 g) −1300 h) 0,000050

150 a) 1 b) 2 c) 1 d) 3 e) 7 f) 2 g) 1 h) 2

151 a) $7x^2 + 3x$
b) $4(x^2 + x^3)$ tai $4x^2 + 4x^3$
c) $ax^2 + (b + c)x$ tai $ax^2 + bx + cx$
d) $(a + f)x^3 + (b + d)x + (c + e)y^3$

152 a) $2x^2$
b) $\frac{x}{y}$
c) $\frac{xz}{y}$
d) $3y^3z$

153 a) $2x^3 + 3x$

b) $3 + 4\frac{y}{x^2}$

c) $\frac{3}{y} - 2xy^2$

d) $\frac{x}{y^2z} + \frac{3}{2} + \frac{2}{y^2}$

154 a) $-\frac{x}{6}$

b) $\frac{2}{3}x - \frac{17}{6}$

c) $9x + 1$

d) $\frac{7x}{y} + \frac{2y}{x} + 2$

155 a) $\frac{x}{4}$

b) $\frac{x}{y} + 1$

156 $2b$

157

158 8 min 34 s

Liite G Sanasto

Suomi–englanti–ruotsi-sanasto

suomi	englanti	ruotsi	saksa
Laskutoimitukset			
yhteenlasku	addition	addition	Addition
vähennyslasku	subtraction	subtraktion	Subtraktion
kertolasku	multiplication	multiplikation	Multiplikation, Malnehmer
jakolasku	division	division	Division
Lukualueet			
luonnolliset luvut	natural numbers	naturliga tal	die natürlichen Zahlen
kokonaisluvut	integers, whole numbers	heltal	die ganzen Zahlen
rationaaliluvut	rational numbers	rationella tal	die rationalen Zahlen
reaaliluvut	real numbers	reella tal	die reellen Zahlen
kompleksiluvut	complex numbers	komplexa tal	die komplexen Zahlen
Käsitteitä			
yhtälö	equation	ekvation	Gleichung
funktio	function	funktion	Funktion, Abbildung
lukujärjestelmä	numeral system	talsystem	Zahlensystem
paikkajärjestelmä	positional notation, place-value notation	positionssystem	Stellenwertsystem, Positio
kantaluku	base, radix	talbas, bas	Basis

Liite H Tekijät

Siiri Anttonen	
Janne Cederberg	
Lauri Hellsten	
Niko Ilomäki	”We’re gonna make ’em [students] an offer they can’t refuse.”
Olli-Pekka Kahilakoski	
Tero Keinänen	
Vesa Linja-aho	
Ossi Mauno	
Joonas Mäkinen	
Matti Pajunen	”LaTeX ei käänny, Git huutaa leipää, kola on loppu ja päässä viiraa”
Pyry Pakkanen	**”kommentti”**
Pekka Peura	”Jos oppimateriaalia ei tee rahasta, se tulee suoraan sydämestä!”
Annika Piiroinen	”Olen pieni muurahainen ja katson keon kasvavan.”
Kaisa Pohjonen	
Antti Rasila	
Johanna Rämö	
Juha Sointu	
Tommi Sottinen	
Jarno Talponen	
Topi Talvitie	
Sampo Tiensuu	
Ville Tilvis	”Tämä kirja paranee vanhetessaan...”